N.V. EFIMOV

FORMES QUADRATIQUES ET MATRICES

N. ÉFIMOV

FORMES QUADRATIQUES ET MATRICES

ÉDITIONS MIR • MOSCOU • 1976

AVANT-PROPOS

Le présent ouvrage est un supplément à notre cours d'*Eléments de géométrie analytique*.

Le livre se compose de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à la réduction à la forme canonique de l'équation générale des coniques. L'exposé du matériel se fait essentiellement à l'aide de notions algébriques, sans recourir au calcul vectoriel (exception faite de la notion de vecteur comme segment orienté et de celle de projection d'un vecteur sur les axes de coordonnées). Le problème de la théorie générale des coniques est résolu de manière à permettre une généralisation immédiate au cas multidimensionnel. En se bornant donc au cas bidimensionnel on pense avoir élucidé l'essentiel de la question.

Le deuxième chapitre traitant de la réduction à la forme canonique de l'équation générale des quadriques est construit d'après un schéma analogue.

L'objet du troisième chapitre sont les transformations linéaires et les matrices. Ici, de même que dans les chapitres précédents, on raisonne sur le cas bidimensionnel, en généralisant ensuite l'exposé au cas tridimensionnel. A la fin du chapitre on considère la réduction à la forme canonique des formes quadratiques et on met en évidence le rapport qui existe entre cette question et la théorie des coniques et des quadriques. Le troisième chapitre se conforme aux exigences du nouveau programme des Ecoles techniques supérieures quant aux éléments d'algèbre linéaire. L'exposé du troisième chapitre est indépendant de celui des chapitres précédents.

N. Efimov

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE GÉNÉRALE DES CONIQUES

§ 1. Changement de coordonnées dans le plan

1. Rappelons les formules de changement de coordonnées cartésiennes rectangulaires dans le plan.

1) Si les nouveaux axes s'obtiennent par une a-translation des anciens axes dans le sens de l'axe Ox et une b-translation dans le sens de l'axe Oy, on a

$$x = x' + a, \quad y = y' + b; \tag{1}$$

ici $(x; y)$ sont les anciennes coordonnées d'un point arbitraire, $(x'; y')$ les nouvelles coordonnées de ce point.

2) Si les nouveaux axes s'obtiennent par rotation des anciens axes d'un angle α autour de l'origine des coordonnées fixe, on a

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dans les paragraphes qui suivent ces formules seront utilisées pour simplifier l'équation générale des courbes du second degré ou coniques. Il est à noter que les formules (1) et (2) sont valables à condition que l'échelle soit la même dans l'ancien et le nouveau système de coordonnées.

2. Pour faciliter l'usage des formules (2), écrivons-les sous une forme condensée:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y', \\ y &= m_1 x' + m_2 y'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Autrement dit, nous avons introduit les notations suivantes pour les coefficients des formules (2):

$$l_1 = \cos\alpha, \quad m_1 = \sin\alpha, \quad l_2 = -\sin\alpha, \quad m_2 = \cos\alpha.$$

Notons que le couple de coefficients l_1, m_1 admet une interprétation géométrique. En effet, si l'on porte sur le nouvel axe Ox' un segment de longueur unité dirigé de l'origine des coordonnées dans le sens des valeurs positives de cet axe, c'est-à-dire le vecteur

unitaire de l'axe Ox', les projections de ce vecteur sur les anciens axes de coordonnées seront $l_1 = \cos\alpha$, $m_1 = \sin\alpha$.

Ainsi donc,

$$\{l_1;\ m_1\} = \{\cos\alpha;\ \sin\alpha\} \tag{4}$$

est le vecteur unitaire donnant le sens du nouvel axe d'abscisses. De façon analogue

$$\{l_2;\ m_2\} = \{-\sin\alpha;\ \cos\alpha\} = \left\{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right);\ \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right\} \tag{5}$$

est le vecteur unitaire définissant le sens du nouvel axe d'ordonnées (fig. 1).

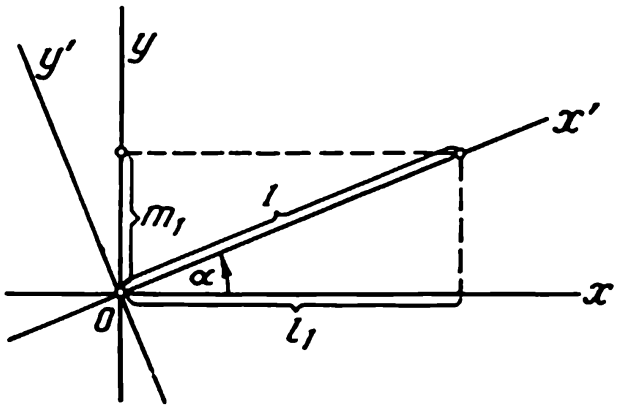

Fig. 1.

3. Les formules (2) expriment les anciennes coordonnées d'un point arbitraire par ses nouvelles coordonnées. Souvent on a besoin de formules inverses donnant les nouvelles coordonnées par les anciennes. Pour les trouver remarquons que le nouveau système d'axes s'obtient par rotation des anciens axes d'un angle α; d'autre part, on peut revenir aux axes primitifs en tournant les nouveaux axes d'un angle $-\alpha$. Il serait donc légitime d'intervertir dans les formules (2) les anciennes et les nouvelles coordonnées, en ayant soin de remplacer en même temps α par $-\alpha$, on obtient

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned}$$

étant donné que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Dans les notations introduites plus haut on obtient

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1x + m_1y, \\ y' &= l_2x + m_2y. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

4. Les coefficients l_1, m_1, l_2, m_2 des formules (3) vérifient les conditions suivantes:

$$l_1^2 + m_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 = 1, \tag{7}$$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0, \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 1. \tag{9}$$

Ces égalités découlent immédiatement de (4) et (5). Les relations (7), (8), (9) sont des conditions à la fois nécessaires et suffisantes pour que les formules (3) expriment un changement de coordonnées

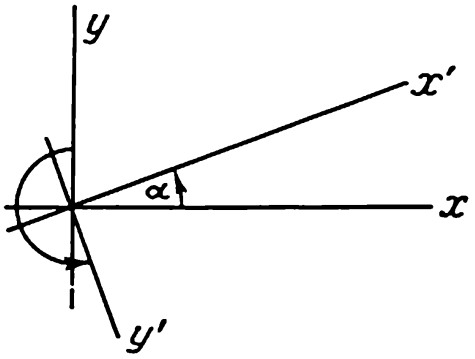

Fig. 2.

rectangulaires par rotation du système d'axes (en conservant l'échelle). En effet, soit un système d'axes rectangulaires Ox, Oy et soient les formules (3) à coefficients l_1, m_1, l_2, m_2. Si sont observées les conditions (7), il existe un angle α et un angle β tels que

$$\{l_1;\ m_1\} = \{\cos\alpha;\ \sin\alpha\}, \quad \{l_2;\ m_2\} = \{\cos\beta;\ \sin\beta\}.$$

Si l'égalité (8) est également observée, on a

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta - \alpha) = 0.$$

Ainsi, l'égalité (8) garantit l'orthogonalité des vecteurs $\{l_1;\ m_1\}$ et $\{l_2;\ m_2\}$. Comme $\cos(\beta - \alpha) = 0$, on a soit $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, soit $\beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$. De même, on a

$$\text{soit } \{l_2;\ m_2\} = \{-\sin\alpha;\ \cos\alpha\},$$
$$\text{soit } \{l_2;\ m_2\} = \{\sin\alpha;\ -\cos\alpha\}.$$

La condition (9) élimine la seconde hypothèse de sorte qu'il ne reste que $\{l_2;\ m_2\} = \{-\sin\alpha,\ \cos\alpha\}$. D'autre part, les formules (3) se ramènent aux formules (2), ce qui veut dire qu'à condition d'observer les relations (7) (8), (9) on passe effective-

ment à un nouveau système rectangulaire, en conservant l'ancienne échelle; les deux axes tournent dans ce cas d'un même angle et dans un même sens.

5. Considérons maintenant un changement de coordonnées cartésiennes où l'axe Ox' s'obtient par rotation de l'axe Ox d'un angle α, et l'axe Oy' par rotation de l'axe Oy d'un angle $\alpha + \pi$ (fig. 2). Une telle transformation change l'orientation des axes, en effet, la rotation la plus courte de l'axe Ox vers l'axe Oy se fait dans le sens rétrograde et le chemin le plus court pour amener Ox' sur Oy' se parcourt dans le sens direct. Les anciennes et les nouvelles coordonnées se trouvent alors liées par les formules:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha - y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Pour se convaincre de la validité de ces formules raisonnons comme suit: on peut réaliser le changement demandé en deux étapes, en tournant d'abord les deux axes de l'angle α et en changeant ensuite le sens du nouvel axe d'ordonnées. Le procédé consiste alors à écrire les formules (2) et à changer les signes des termes en y'; on sera amené ainsi à (10). On peut récrire les formules (10) sous la forme (3) si l'on pose

$$\{l_1;\ m_1\} = \{\cos\alpha;\ \sin\alpha\},$$
$$\{l_2;\ m_2\} = \{\sin\alpha;\ -\cos\alpha\}.$$

On vérifie aisément que dans ce cas également sont réalisées les conditions (7), (8). Cependant, au lieu de (9) on aura

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = -1. \tag{11}$$

Les relations (7), (8), (11) sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que les formules (3) expriment une transformation des coordonnées rectangulaires avec changement de sens des axes (la démonstration répète mot à mot les raisonnements du n° 4 jusqu'à l'endroit où l'on établit que soit $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, soit $\beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$; la condition (11) oblige à rejeter la première éventualité).

On peut maintenant formuler la proposition suivante: *si les coefficients des formules* (3) *vérifient les conditions* (7), (8), *ces formules expriment un changement de coordonnées rectangulaires de même échelle* (et, bien entendu, de même origine). L'orientation des axes se conserve ou change suivant qu'est observée la condition (9) ou (11).

§ 2. Réduction à la forme canonique de l'équation d'une conique de centre à l'origine des coordonnées

6. Soit l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H. \tag{1}$$

On constate qu'elle ne renferme pas de termes du premier degré en x et y. Toutes les coniques d'équation jouissent d'une propriété particulière. Plus exactement, le premier membre de (1) ne change pas si l'on remplace x, y par $-x$, $-y$; par conséquent, si le point $M(x; y)$ appartient à la courbe (1), le point $N(-x; -y)$ lui appartient également. Autrement dit, les points de la courbe (1) vont par paires, chaque point ayant un symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. Si donc une courbe du second degré est donnée par une équation du type (1), alors a) elle possède un centre (de symétrie); b) ce centre est situé à l'origine.

7. Le premier membre de l'équation (1)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \tag{2}$$

est un polynôme homogène du second degré (c'est-à-dire un polynôme composé uniquement de termes du second degré). Un polynôme de ce genre est appelé *forme quadratique* en deux variables x, y.

Nous allons nous occuper maintenant de la réduction de la forme quadratique (2) à la forme canonique. Le problème consiste à tourner les axes de coordonnées de façon à éliminer de la forme (2) le terme contenant le produit des nouvelles coordonnées courantes. Conformément au § 1, il s'agit de trouver des formules

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y', \\ y &= m_1x' + m_2y', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

telles que l'on ait l'identité

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2. \tag{4}$$

Ceci signifie que, après substitution dans (4) des expressions (3), la forme quadratique prendra l'aspect du second membre de (4), appelé *forme canonique* (i.e. une forme telle que le coefficient en xy soit nul). Les coefficients des formules (3) doivent être choisis de sorte que soient observées les conditions (7) à (9) du § 1.

En réduisant à la forme canonique la forme quadratique (2), on y réduit en même temps l'équation (1). Remettons au § 4

la réduction de l'équation générale du second degré à la forme canonique, et occupons-nous de l'équation (1). Nous allons montrer que chaque forme quadratique (2), et donc chaque équation (1), se ramène à la forme canonique, au moyen d'une méthode simple que nous indiquerons.

8. Supposons d'abord que les coefficients des formules (3) soient trouvés et que l'identité (4) ait lieu. Récrivons-la comme suit :

$$(Ax + By)\,x + (Bx + Cy)\,y = \lambda_1 x'x' + \lambda_2 y'y'. \tag{5}$$

Développons chaque parenthèse du premier membre de (5) selon les formules (3), il vient :

$$\left.\begin{aligned} Ax+By &= (Al_1+Bm_1)\,x' + (Al_2+Bm_2)\,y', \\ Bx+Cy &= (Bl_1+Cm_1)\,x' + (Bl_2+Cm_2)\,y'. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Servons-nous ensuite des formules inverses de changement d'axes

$$\begin{aligned} x' &= l_1 x + m_1 y, \\ y' &= l_2 x + m_2 y ; \end{aligned}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} x'x' &= (l_1 x + m_1 y)\,x', \\ y'y' &= (l_2 x + m_2 y)\,y'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Compte tenu de (6) et (7), l'identité (5) devient

$$\begin{aligned} &(Al_1 + Bm_1)\,xx' + (Bl_1 + Cm_1)\,yx' + (Al_2 + Bm_2)\,xy' + \\ &\quad + (Bl_2 + Cm_2)\,yy' = \lambda_1 l_1 xx' + \lambda_1 m_1 yx' + \lambda_2 l_2 xy' + \lambda_2 m_2 yy'. \end{aligned} \tag{8}$$

On remarque que le premier membre de (8) comporte quatre termes différents ; on a autant de termes analogues dans le second membre de (8). L'identité (8) est vérifiée si les coefficients des termes semblables figurant aux premier et second membres sont identiques ; en même temps se trouve vérifiée l'identité (4). Ainsi, pour résoudre le problème il suffit de choisir les coefficients des formules (3) et les nombres λ_1, λ_2 de façon à avoir

$$\left.\begin{aligned} Al_1 + Bm_1 &= \lambda_1 l_1, \\ Bl_1 + Cm_1 &= \lambda_1 m_1 \end{aligned}\right\} ; \qquad \left.\begin{aligned} Al_2 + Bm_2 &= \lambda_2 l_2, \\ Bl_2 + Cm_2 &= \lambda_2 m_2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Le problème s'est ramené au système d'équations

$$\left.\begin{aligned} Al + Bm &= \lambda l, \\ Bl + Cm &= \lambda m. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Pour terminer, il nous reste à trouver deux solutions l_1, m_1, λ_1 et l_2, m_2, λ_2 du système (10) satisfaisant aux conditions (7) à (9) du § 1.

9. Occupons-nous du système (10). Récrivons-le comme suit :

$$\left.\begin{aligned}(A-\lambda)\,l+Bm=0,\\ Bl+(C-\lambda)\,m=0.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

D'où

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

car dans le cas contraire le système (11) ne fournit que $l = 0$, $m = 0$ (voir notre cours *Eléments de géométrie analytique*, Appendice, § 1, n° 5) *). Développons le déterminant (12)

$$\lambda^2 - (A + C)\,\lambda + (AC - B^2) = 0.$$

La résolution de cette équation nous donne les valeurs cherchées de $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A+C \pm \sqrt{(A+C)^2-4\,(AC-B^2)}}{2}.$$

Notons que

$$(A + C)^2 - 4\,(AC - B^2) = (A - C)^2 + 4B^2 \geqslant 0;$$

par conséquent, les racines de l'équation (12) sont toutes réelles.

L'équation (12) est dite *équation caractéristique* de la forme quadratique (2) ; les racines λ_1, λ_2 de l'équation (12) sont appelées *nombres caractéristiques* de cette forme ; ce sont précisément les coefficients que l'on obtient en réduisant la forme quadratique à sa forme canonique.

Deux cas sont possibles.

P r e m i e r c a s. $(A - C)^2 + 4B^2 > 0$. Alors $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Si l'on porte $\lambda = \lambda_1$ dans le système (11), celui-ci aura une solution non nulle l, m. Construisons le vecteur $\{l ; m\}$. La direction de ce vecteur s'appelle *direction principale* **) de la forme concernée, correspondant au nombre caractéristique λ_1. Il est clair que le vecteur $\{l_1, m_1\}$, où $l_1 = \mu l$, $m_1 = \mu m$ (μ étant un nombre quelconque non nul) est de même orientation que la direction principale correspondant à λ_1.

---

*) Il s'agit du cours *Eléments de géométrie analytique* de N. Efimov, éd. Mir, Moscou, 1969, qui sera nommé dans la suite simplement « Cours ».

**) Il est sous-entendu que la direction principale est orientée.

Choisissons

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{l^2 + m^2}};$$

il vient

$$l_1^2 + m_1^2 = 1.$$

Nous appellerons *normée* une telle solution l_1, m_1 du système (11). Le vecteur $\{l_1; m_1\}$ est le vecteur unitaire de la direction principale correspondant au nombre λ_1. De même, en résolvant le système (11) pour $\lambda = \lambda_2$ et en normant la solution, on obtient le vecteur unitaire $\{l_2; m_2\}$ qui détermine l'autre direction principale de la forme quadratique considérée, correspondant au nombre caractéristique λ_2. Montrons que les directions principales associées aux nombres caractéristiques λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) sont orthogonales.

Notons tout d'abord que les nombres l_1, m_1, λ_1 et l_2, m_2, λ_2 vérifient les égalités (9) (puisqu'ils sont déduits du système (11)).

Multiplions la première et la seconde égalités du groupe de gauche de (9) respectivement par l_2, m_2 et ajoutons-les terme à terme; procédons de même avec le groupe de droite, en le multipliant par l_1, m_1. Il vient:

$$(Al_1 + Bm_1)\, l_2 + (Bl_1 + Cm_1)\, m_2 = \lambda_1 (l_1 l_2 + m_1 m_2),$$
$$(Al_2 + Bm_2)\, l_1 + (Bl_2 + Cm_2)\, m_1 = \lambda_2 (l_1 l_2 + m_1 m_2).$$

En chassant les parenthèses on s'aperçoit que les premiers membres des deux égalités sont identiques. Par suite, en retranchant terme à terme la seconde égalité de la première on trouve

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)(l_1 l_2 + m_1 m_2).$$

Mais comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on doit avoir

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer (voir n° 4).

Nous avons résolu le problème pour le cas particulier considéré. En effet, nous avons démontré que les vecteurs définissant les directions principales sont orthogonaux; on peut donc diriger les axes du nouveau système rectangulaire dans le sens de ces vecteurs. En passant aux nouvelles coordonnées à l'aide des formules (3) avec les coefficients trouvés l_1, m_1, l_2, m_2, on réduit la forme quadratique donnée à sa forme canonique; ceci est évident, car les égalités (9) sont vérifiées. Il reste à tenir compte de la condition (9) du § 1, laquelle s'observe, d'ailleurs, facilement, en multipliant au besoin l_1, m_1 (ou l_2, m_2) par -1.

Deuxième cas. $(A - C)^2 + 4B^2 = 0$. Cette fois $\lambda_1 = \lambda_2$. Comme on n'a plus besoin de distinguer λ_1 et λ_2, on écrira simplement λ. Il est également évident que dans ce cas $A = C$, $B = 0$. Compte tenu de ceci, la formule définissant les solutions de l'équation du second degré (12) (voir plus haut) donne

$$\lambda = A = C.$$

La substitution de cette valeur de λ dans le système (11) annule tous les coefficients du système. Le système sera constitué alors uniquement d'identités et, par conséquent, sera vérifié quels que soient les nombres l, m. Donc, *si les nombres caractéristiques d'une forme quadratique se confondent, toute direction est principale pour cette forme.* Comme $A = C$, $B = 0$, une telle forme quadratique se présente déjà sous sa forme canonique

$$Ax^2 + Ay^2.$$

Si l'on tourne les axes d'un angle quelconque, la forme restera canonique.

10. En résumé, formulons la règle suivante.

Pour réduire une forme quadratique donnée à sa forme canonique il faut résoudre l'équation (12) *et trouver les nombres caractéristiques* λ_1, λ_2 *qui sont précisément les coefficients de la forme canonique. Les axes de coordonnées doivent être confondus avec les directions principales de la forme. Si l'axe d'abscisses se confond avec la première direction principale* (définie par le système (11) pour $\lambda = \lambda_1$), λ_1 *sera le coefficient du carré de l'abscisse.*

Il est clair que cette règle est valable également dans le cas de l'équation (1), étant donné que son premier membre est une forme quadratique.

Exemple. Réduire à sa forme canonique l'équation

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 = 20.$$

Solution. Ecrivons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Développons cette équation

$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0.$$

En les résolvant nous trouvons les nombres caractéristiques: $\lambda_1 = 20$; $\lambda_2 = 5$. D'où l'équation canonique

$$20x'^2 + 5y'^2 = 20,$$

ou

$$\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

La courbe trouvée est une ellipse de demi-axes $a = 2$, $b = 1$. Si, en plus, nous voulons connaître l'orientation de la courbe par rapport aux axes de coordonnées, il nous faut trouver le changement de coordonnées qui réduit l'équation donnée à sa forme canonique. Ecrivons le système (11)

$$\left.\begin{aligned}(17-\lambda)\,l+6m&=0,\\ 6l+(8-\lambda)\,m&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

En posant ici $\lambda = \lambda_1 = 20$, on obtient

$$\begin{aligned}-3l+6m&=0,\\ 6l-12m&=0.\end{aligned}$$

On est arrivé, en fait, à une seule équation ; on peut choisir pour solution $l = 2$, $m = 1$ par exemple. En normant cette solution on trouve $l_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $m_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. En posant dans le système (*) $\lambda = \lambda_2 = 5$, on obtient

$$\begin{aligned}12l+6m&=0,\\ 6l+3m&=0.\end{aligned}$$

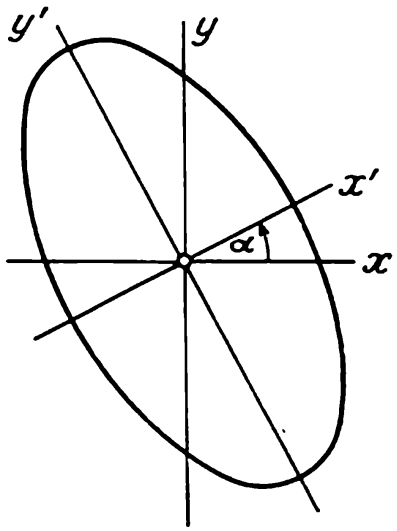

Fig. 3.

D'où $l_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, $m_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (les signes sont choisis de façon à satisfaire la condition (9) du § 1). Le passage aux nouveaux axes s'obtient par une rotation d'un angle α défini par les égalités $\cos\alpha = l_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = m_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou, plus simplement, la tangente :

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m_1}{l_1}=\frac{1}{2}$$

(fig. 3). En vertu de (3) les formules du changement de coordonnées correspondant s'écrivent :

$$x=\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}, \qquad y=\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}.$$

Une vérification directe permet de se convaincre que ces formules donnent l'identité

$$17x^2+12xy+8y^2=20x'^2+5y'^2.$$

§ 3. Invariants et classification des formes quadratiques de deux arguments

11. Au paragraphe précédent nous avons indiqué une méthode de réduction d'une forme quadratique donnée de deux arguments à sa forme canonique. Il est tout naturel de se demander: s'il n'existe pas un autre changement de coordonnées rectangulaires qui ramène la forme quadratique donnée à une autre forme canonique. Montrons que ceci est impossible. Autrement dit, *il existe une seule forme canonique pour chaque forme quadratique* (à la permutation des variables près). Notons que l'unicité de la forme canonique n'a de sens que si l'on opère dans des axes rectangulaires avec une même échelle.

Passons à la démonstration de notre proposition. Désignons par Φ la valeur de la forme quadratique donnée:

$$\Phi = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2. \tag{1}$$

En vertu de cette égalité, à chaque point $M(x; y)$ on associe une valeur numérique Φ, appelée valeur de la forme donnée au point $M(x; y)$. Réduisons notre forme quadratique à sa forme canonique. Soient λ_1, λ_2 les nombres caractéristiques de la forme; supposons pour fixer les idées que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ et orientons le nouvel axe d'abscisses suivant la direction principale qui correspond au nombre λ_1. Pour la valeur Φ au point M on a alors l'égalité

$$\Phi = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2,$$

où x', y' sont les nouvelles coordonnées du point M. Comme $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, on a

$$\lambda_1 (x'^2 + y'^2) \leqslant \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \leqslant \lambda_2 (x'^2 + y'^2).$$

Vu que $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$, on a les mêmes relations dans les anciens axes:

$$\lambda_1 (x^2 + y^2) \leqslant \Phi \leqslant \lambda_2 (x^2 + y^2).$$

Astreignons le point M à se trouver sur la circonférence unité:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Sous cette condition toute valeur de Φ (correspondant à toute position du point M sur la circonférence unité) est comprise entre λ_1 et λ_2, c'est-à-dire que

$$\lambda_1 \leqslant \Phi \leqslant \lambda_2.$$

Les limites de variation de Φ trouvées sont exactes. Notamment, si $x' = \pm 1$, $y' = 0$, alors $\Phi = \lambda_1$; si $x' = 0$, $y' = \pm 1$, on a $\Phi = \lambda_2$. Ceci démontre notre proposition. En effet, si dans d'au-

tres axes, la forme donnée prend également la forme canonique mais avec d'autres coefficients, en raisonnant comme nous l'avons fait plus haut, on montrerait qu'une même forme possède sur une même circonférence unité d'autres limites de variation, or, ceci est impossible.

12. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, il existe un seul système de coordonnées où la forme quadratique donnée prend sa forme canonique (au changement du sens des axes près). Démontrons cette proposition. Supposons que $\lambda_1 < \lambda_2$ et reprenons les relations précédentes. Notons que dans ce cas on a pour $x' \neq 0$

$$\Phi = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 < \lambda_2 (x'^2 + y'^2) = \lambda_2,$$

c'est-à-dire que pour $x' \neq 0$ on a

$$\Phi < \lambda_2.$$

C'est uniquement en deux points $x' = 0$, $y' = \pm 1$ qu'on obtient

$$\Phi = \lambda_2.$$

Ainsi, sur la circonférence unité existe un seul couple de points diamétralement opposés où Φ prend sa valeur maximale. C'est précisément par ces points que passe l'axe d'ordonnées du système de coordonnées dans lequel la forme quadratique donnée se réduit à sa forme canonique. Nous avons donc démontré l'unicité d'un tel système de coordonnées.

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, la forme quadratique prend sa forme canonique dans des axes rectangulaires quelconques. En effet, en désignant $\lambda_1 = \lambda_2$ par λ, on obtient dans un système d'axes

$$\Phi = \lambda (x'^2 + y'^2).$$

Mais en tournant encore une fois les axes de coordonnées d'un angle arbitraire et en passant aux nouvelles coordonnées x'', y'', on trouve que $x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$, c'est-à-dire que Φ conserve sa forme canonique. Cette particularité a déjà été mentionnée au paragraphe précédent.

13. Soit une forme quadratique arbitraire

$$\Phi = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

et soit le changement de coordonnées

$$x = l_1 x' + l_2 y',$$
$$y = m_1 x' + m_2 y',$$

la rotation des axes étant quelconque. En portant ces expressions de x, y dans Φ, on obtient :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2.$$

La forme quadratique de gauche et de droite se transformant l'une dans l'autre, elles se réduisent à une même forme canonique. Par conséquent, ces deux formes ont mêmes nombres caractéristiques λ_1, λ_2. Ecrivons pour chacune d'elles l'équation caractéristique (voir § 2) :

$$\lambda^2-(A+C)\lambda+(AC-B^2)=0,$$
$$\lambda^2-(A'+C')\lambda+(A'C'-B'^2)=0.$$

Comme ces équations ont mêmes racines λ_1, λ_2, elles ne diffèrent pas l'une de l'autre. Par conséquent,

$$A'+C'=A+C,$$
$$A'C'-B'^2=AC-B^2$$

(ceci n'implique pas nécessairement que A', B', C' soient respectivement égaux à A, B, C).

On voit que les quantités $A+C$ et $AC-B^2$ se conservent dans tout changement de coordonnées à condition de prendre les nouveaux axes rectangulaires ; pour cette raison, elles sont appelées *invariants* de la forme relativement au changement d'axes rectangulaires.

L'invariant $AC-B^2$ se nomme discriminant de la forme quadratique et se note δ :

$$\delta=AC-B^2=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

En vertu du théorème de Viète

$$\delta=\lambda_1\lambda_2,$$

où λ_1, λ_2 sont les nombres caractéristiques de la forme donnée.

14. Une forme quadratique sera dite *elliptique* si ses nombres caractéristiques λ_1, λ_2 sont simultanément non nuls et de même signe ; *hyperbolique* si les nombres λ_1, λ_2 sont de signes contraires ; et *parabolique* si un des nombres λ_1, λ_2 est nul. Comme $\delta=\lambda_1\lambda_2$, la forme est elliptique si $\delta>0$, hyperbolique si $\delta<0$, et parabolique si $\delta=0$.

Soit une forme elliptique Φ ; supposons ses nombres caractéristiques positifs : $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. Conformément au n° 11 (posant $\lambda_1\leqslant\lambda_2$) on a les inégalités

$$\lambda_1(x^2+y^2)\leqslant\Phi\leqslant\lambda_2(x^2+y^2). \qquad (2)$$

Par conséquent, en tout point $M(x;\ y)$, sauf à l'origine, on a $\Phi>0$. Une telle forme est dite *définie positive*. Si le point $M(x;\ y)$ parcourt la circonférence unité $x^2+y^2=1$, toute forme

définie positive varie dans des limites positives constantes:

$$\lambda_1 \leqslant \Phi \leqslant \lambda_2.$$

Supposons $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 \leqslant \lambda_2$). En vertu des relations (2) on a dans ce cas en tout point, sauf à l'origine, $\Phi < 0$. Cette forme est dite *définie négative*. Sur la circonférence unité, toute forme définie négative varie dans des limites négatives constantes. Ainsi, chaque forme elliptique

$$\Phi = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \ (\delta = AC - B^2 > 0)$$

est soit positive, soit négative. Pour déterminer à laquelle de ces deux classes se rapporte une forme elliptique donnée, il suffit de vérifier son signe en un point arbitraire. En posant $x = 1$, $y = 0$, on constate que la forme elliptique est définie positive si $A > 0$, et définie négative si $A < 0$.

Soit maintenant une forme parabolique. Supposons que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$; alors

$$0 \leqslant \Phi \leqslant \lambda_2 (x^2 + y^2),$$

c'est-à-dire que dans ce cas la forme Φ ou bien est partout positive, ou bien est nulle. Cependant, contrairement à la forme elliptique, la forme parabolique s'annule en des points autres que l'origine. En particulier, on a sur la circonférence unité

$$0 \leqslant \Phi \leqslant \lambda_2,$$

c'est-à-dire que Φ varie dans des limites dont l'une est zéro et l'autre est le nombre positif, λ_2.

On établit de façon analogue que dans le cas $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$ la forme parabolique Φ est partout négative ou nulle. Sur la circonférence unité une telle forme varie entre le nombre négatif λ_1 et zéro.

Soit, enfin, une forme hyperbolique. Supposons $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Vu que λ_1 et λ_2 sont les limites de variation de Φ sur la circonférence unité, cette forme hyperbolique est alternée.

Exemples. 1) La forme $\Phi = 5x^2 - 4xy + 5y^2$ est elliptique, puisque $\delta = 21 > 0$, et définie positive, du fait que $A = 5 > 0$. Sur la circonférence unité elle varie entre les limites

$$3 \leqslant 5x^2 - 4xy + 5y^2 \leqslant 7.$$

2) La forme $\Phi = x^2 - 2xy + y^2$ est parabolique, car $\delta = 0$. Cette forme est positive en tout point où $x \neq y$ et nulle aux points où $x = y$. Sur la circonférence unité elle varie entre les limites

$$0 \leqslant x^2 - 2xy + y^2 \leqslant 2.$$

3) La forme $\Phi = x^2 + 12xy + y^2$ est hyperbolique et, donc, alternée, vu que $\delta = -35 < 0$. Ses limites de variation sur la circonférence unité sont les nombres -5 et $+7$.

4) L'équation $5x^2 - 4xy + 5y^2 = -1$ ne définit aucune image réelle, étant une forme quadratique définie positive, dont le second membre est négatif.

§ 4. Réduction à la forme canonique de l'équation générale d'une conique

15. Soit l'équation générale d'une conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Notre but est de réduire l'équation (1) à sa forme canonique et de déterminer par là même le type de la courbe donnée. Le premier membre de l'équation (1) est constitué par:

1) une forme quadratique composée des termes de plus haut degré, soit $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$;

2) une forme linéaire composée des termes du premier degré, soit $2Dx + 2Ey$;

3) un terme constant F.

Supposons que les axes de coordonnées donnés tournent d'un angle arbitraire, les coordonnées changent alors selon les formules

$$\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y', \\ y &= m_1x' + m_2y'. \end{aligned} \qquad (2)$$

Si dans l'équation (1) on passe aux nouvelles coordonnées, c'est-à-dire si l'on substitue à x, y leurs expressions (2), les transformations que subiront les groupes de termes isolés dans le premier membre de cette équation seront indépendantes les unes des autres. Orientons les nouveaux axes de coordonnées suivant les directions principales de la forme quadratique des termes de plus haut degré (on les appelle aussi directions principales de la courbe donnée). Alors

1) la forme quadratique des termes de plus haut degré prend la forme canonique:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2.$$

2) Le groupe des termes linéaires subit les transformations suivantes:

$$\begin{aligned} 2Dx + 2Ey &= 2D(l_1x' + l_2y') + 2E(m_1x' + m_2y') = \\ &= 2(Dl_1 + Em_1)x' + 2(Dl_2 + Em_2)y' = 2\mu_1x' + 2\mu_2y' \end{aligned}$$

(par μ_1, μ_2 sont désignés les nouveaux coefficients).

3) Le terme constant est invariant.

L'équation de la courbe donnée sera donc dans les nouveaux axes

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + F = 0. \tag{3}$$

Les simplifications ultérieures de cette équation sont suggérées par le type de la forme quadratique des termes de plus haut degré.

Comme au § 3, nous désignerons dans ce qui suit par δ le discriminant de la forme quadratique des termes de plus haut degré de l'équation initiale

$$\delta = AC - B^2.$$

16. Supposons $\delta \neq 0$. Comme $\delta = \lambda_1 \lambda_2$, on a

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0,$$

ce qui permet de récrire l'équation (3) sous la forme

$$\lambda_1 \left(x'^2 + 2\frac{\mu_1}{\lambda_1} x' \right) + \lambda_2 \left(y'^2 + 2\frac{\mu_2}{\lambda_2} y' \right) = -F.$$

D'où

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2} \right)^2 = -F + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2}. \tag{4}$$

Effectuons le changement de coordonnées suivant :

$$x' = x'' - \frac{\mu_1}{\lambda_1},$$

$$y' = y'' - \frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

En désignant le second membre de (4) par la lettre H, on obtient dans ces derniers axes l'équation de la courbe initiale sous la forme canonique :

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = H. \tag{5}$$

Deux cas sont possibles.

1) Les nombres λ_1, λ_2 sont de même signe ; nous allons considérer que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ (dans le cas contraire nous aurions changé le signe de tous les termes de l'équation). Si $H \neq 0$, l'équation (5) se ramène à la forme

$$\frac{x''^2}{\frac{H}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{H}{\lambda_2}} = 1 ;$$

d'où l'on voit que pour $H > 0$ l'équation (5) définit une ellipse de demi-axes $a = \sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}$.

Si $H = 0$, l'équation (5) définit un point unique réel $x'' = 0$, $y'' = 0$. On dit que l'équation (5) définit dans ce cas une *ellipse dégénérée*.

Si $H < 0$ (pour $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$), l'équation ne correspond à aucune image réelle. On dit que l'équation (5) est celle d'une *ellipse imaginaire*.

2) Les nombres λ_1, λ_2 sont de signes contraires ; posons $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Si dans ce cas $H > 0$, l'équation (5) définit une *hyperbole* de demi-axes $a = \sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\frac{H}{\lambda_2}}$ qui coupe l'axe des abscisses ; pour $H < 0$ on obtient également une hyperbole, mais coupant l'axe des ordonnées. Si $H = 0$, l'équation (5) définit un couple de droites passant par l'origine. En effet, le premier membre de l'équation (5) se décompose en facteurs réels du premier degré ; pour $H = 0$ on a

$$(\sqrt{\lambda_1}x'' + \sqrt{-\lambda_2}y'')(\sqrt{\lambda_1}x'' - \sqrt{-\lambda_2}y'') = 0;$$

il en découle que la courbe se décompose en deux droites $\sqrt{\lambda_1}x'' + \sqrt{-\lambda_2}y'' = 0$ et $\sqrt{\lambda_1}x'' - \sqrt{-\lambda_2}y'' = 0$ (par exemple, l'équation $4x''^2 - 9y''^2 = 0$ définit le couple de droites $2x'' + 3y'' = 0$, $2x'' - 3y'' = 0$). Dans ce dernier cas on dit que l'équation (5) définit une *hyperbole dégénérée*.

Reprenons l'équation proposée (1). D'après les coefficients des termes de plus haut degré nous pouvons calculer immédiatement $\delta = AC - B^2$. Mais $\delta = \lambda_1\lambda_2$; par suite, pour $\delta > 0$ les nombres λ_1, λ_2 sont de même signe, pour $\delta < 0$, λ_1 et λ_2 sont de signes contraires. On en tire la conclusion suivante : *si pour l'équation donnée* (1) *on a* $\delta = AC - B^2 > 0$, *celle-ci définit une ellipse* (réelle, imaginaire ou dégénérée) ; *si* $\delta < 0$, *l'équation définit une hyperbole ou un couple de droites* (hyperbole dégénérée).

17. Considérons maintenant l'équation (1) sous la condition $\delta = 0$. Comme $\delta = \lambda_1, \lambda_2$, l'un des nombres λ_1, λ_2 est nul. Posons

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0.$$

L'équation (3) s'écrit alors

$$\lambda_1 x'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + F = 0$$

ou

$$\lambda_1\left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2\mu_2 y' + \left(F - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1}\right) = 0.$$

En désignant la dernière parenthèse par la lettre K, on obtient

$$\lambda_1\left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2\mu_2 y' + K = 0. \qquad (6)$$

Les transformations ultérieures de l'équation (6) dépendent de μ_2.

1) Si $\mu_2 \neq 0$, l'équation (6) se récrit

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2\mu_2 \left(y' + \frac{K}{2\mu_2}\right) = 0.$$

Effectuons le changement de coordonnées suivant :

$$x' = x'' - \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \quad y' = y'' - \frac{K}{2\mu_2}.$$

On obtient l'équation canonique d'une parabole :

$$\lambda_1 x''^2 + 2\mu_2 y'' = 0.$$

2) Si $\mu_2 = 0$, il suffit d'effectuer le changement de coordonnées suivant : $x' = x'' - \frac{\mu_1}{\lambda_1}$, $y' = y''$ et l'équation (6) prend la forme canonique.

$$\lambda_1 x''^2 + K = 0. \tag{7}$$

Supposons que $\lambda_1 > 0$. Pour $K < 0$ l'équation (7) définit un couple de droites parallèles :

$$\sqrt{\lambda_1}\, x'' + \sqrt{-K} = 0, \quad \sqrt{\lambda_1}\, x'' - \sqrt{-K} = 0 \tag{8}$$

(par exemple, l'équation $4x'' - 9 = 0$ définit le couple de droites $2x'' + 3 = 0$, $2x'' - 3 = 0$). Pour $K = 0$ les droites (8) se confondent. Si $K > 0$, l'équation (7) ne correspond à aucune image réelle. Cependant, on dit dans ce cas que l'équation (7) définit un *couple de droites imaginaires* (pour $K > 0$ le nombre $\sqrt{-K}$ dans les équations (8) est imaginaire). En général, on appelle l'équation (7) équation d'une *parabole dégénérée*.

En reprenant l'équation proposée (1), on remarque que *si* $\delta = AC - B^2 = 0$, *l'équation* (1) *est celle d'une parabole ou d'un couple de droites* (*parabole dégénérée*).

18. En résumé, on aboutit à la conclusion générale suivante : *toute équation du second degré*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

définit soit une ellipse (*si* $\delta = AC - B^2 > 0$), *soit une hyperbole* (*si* $\delta < 0$), *soit une parabole* (*si* $\delta = 0$). Il faut bien sûr tenir compte des ellipses imaginaire et dégénérée ainsi que des hyperboles et paraboles dégénérées.

§ 5. Équations du centre. Indice de dégénérescence d'une conique. Exemples

19. Au n° 16 nous avons réduit à sa plus simple expression l'équation générale du second degré dans le cas où elle définissait une ellipse ou une hyperbole (c'est-à-dire dans le cas où $\delta \neq 0$). La simplification de l'équation s'est effectuée en deux étapes: d'abord nous avons tourné les axes de façon à les orienter suivant les directions principales de la courbe, puis nous avons effectué une translation parallèle. La dernière transformation a pour but de ramener l'origine des coordonnées au centre de l'ellipse ou de l'hyperbole données. On peut permuter ces opérations, c'est-à-dire placer d'abord l'origine au centre des coordonnées et puis tourner les axes de façon requise. En suivant cette marche nous allons déduire des équations qui nous permettront de définir le centre d'une conique (quand il existe) directement à partir de l'équation générale de cette courbe.

20. Il y a lieu tout d'abord de préciser ce qu'on entend par centre d'une conique en général.

On appelle *centre* d'une conique donnée un point S tel que, l'origine des coordonnées étant placée en ce point, l'équation de la courbe prenne la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H,$$

c'est-à-dire ne contienne pas de termes linéaires. Le fait que le premier membre de cette équation est invariant relativement au changement du signe des coordonnées courantes signifie que la courbe envisagée est symétrique par rapport au point S, autrement dit, que le point S est le centre de symétrie de la courbe (en fait, nous nous sommes déjà servis de la notion de centre au § 2; ici nous en donnons une définition plus rigoureuse).

Soit une conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Proposons-nous de trouver son centre (s'il existe). En supposant que le centre existe, nous le désignerons comme auparavant par la lettre S; soient x_0, y_0 les coordonnées cherchées du centre (dans les axes donnés). Plaçons l'origine des coordonnées en S; les coordonnées du point courant changent alors d'après les formules

$$x = \tilde{x} + x_0, \quad y = \tilde{y} + y_0, \qquad (2)$$

où $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ sont les nouvelles coordonnées du même point. Passons dans l'équation (1) aux nouveaux axes. A cet effet, remplaçons x, y dans le premier membre de (1) par leurs expressions (2) et

réduisons les termes semblables (par rapport aux nouvelles coordonnées courantes $\tilde{x}$, $\tilde{y}$), il vient :

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=$$
$$=A\tilde{x}^2+2B\tilde{x}\tilde{y}+C\tilde{y}^2+2\tilde{D}\tilde{x}+2\tilde{E}\tilde{y}+\tilde{F}, \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{D}&=Ax_0+By_0+D,\\ \tilde{E}&=Bx_0+Cy_0+E,\\ \tilde{F}&=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F;\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

les coefficients des termes de plus haut degré restent inchangés.

Dans tous les cas, le premier membre de (1) se transforme d'après les formules ci-dessus, indépendamment des particularités du point S. Le point S est centre si $\tilde{D}=0$, $\tilde{E}=0$. D'où les équations du centre

$$\left.\begin{aligned}Ax_0+By_0+D&=0,\\ Bx_0+Cy_0+E&=0.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

En résolvant ce système, on trouve le centre S (x_0, y_0). Le système (5) peut très bien être incompatible ; alors la courbe donnée n'a pas de centre.

Ecrivons le déterminant du système (5) :

$$\delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2.$$

On reconnaît ici le discriminant du groupe des termes de plus haut degré.

Si $\delta\neq 0$, le système (5) est compatible et admet une solution unique. Par conséquent, pour $\delta\neq 0$ la courbe considérée a un centre unique. Toute courbe du second degré jouissant de cette propriété est dite *centrale* ou *à centre*. Les coordonnées du centre d'une courbe sont données par les formules (voir notre cours *Eléments de géométrie analytique*, Appendice, § 1) :

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix}B & D\\ C & E\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}}, \quad y_0=\frac{\begin{vmatrix}D & A\\ E & B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}}. \quad (6)$$

En utilisant (6), cherchons maintenant $\tilde{F}$ à partir de (4). Le calcul de $\tilde{F}$ se simplifie considérablement si l'on groupe ses termes comme suit :

$$\tilde{F}=(Ax_0+By_0+D)\,x_0+(Bx_0+Cy_0+E)\,y_0+(Dx_0+Ey_0+F)\ ;$$

en vertu du système (5) on peut écrire

$$\widetilde{F} = Dx_0 + Ey_0 + F.$$

En utilisant (6) on trouve

$$\widetilde{F} = \frac{D\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

On peut écrire le numérateur de la fraction obtenue sous forme d'un déterminant du troisième ordre:

$$D\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant se note par le symbole Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

et s'appelle discriminant du premier membre de l'équation générale (1). De (7) on déduit finalement

$$\widetilde{F} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Si donc la courbe donnée par l'équation (1) est centrale, ($\delta \neq 0$), en plaçant l'origine des coordonnées en son centre, on réduit l'équation (1) à la forme

$$A\widetilde{x}^2 + 2B\widetilde{x}\widetilde{y} + C\widetilde{y}^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \tag{8}$$

(les coefficients A, B, C restant inchangés). En tournant maintenant les axes de façon convenable, on peut réduire l'équation (8) à la forme canonique:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{9}$$

On voit donc que le terme constant H de l'équation (5) du § 4 peut être calculé directement à partir de l'équation donnée (1), sans qu'on ait besoin de changer de coordonnées: $H = -\frac{\Delta}{\delta}$. Ceci permet d'écrire immédiatement toute l'équation, car les nombres caractéristiques λ_1, λ_2 se calculent directement à partir des coefficients des termes de plus haut degré (voir § 2).

21. Nous avons établi au § 4 que pour $H = 0$ l'équation (5) du § 4 définit une courbe dégénérée. Nous en concluons qu'une conique à centre est dégénérée si et seulement si $\Delta = 0$.

Nous allons montrer au n° suivant que cette même condition caractérise une parabole dégénérée.

22. Supposons que dans l'équation initiale (1) $\delta = 0$. Elle se ramène alors à la forme (6) du § 4. Nous allons établir une formule permettant de calculer le coefficient μ_2 de cette équation à partir des coefficients de l'équation initiale (1). Il s'agit notamment de la formule

$$\mu_2 = \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1}};$$

en même temps il sera montré que le radicande est non inférieur à zéro ($\geqslant 0$). Comme $\delta = AC - B^2 = 0$, les coefficients A et C ne peuvent pas être simultanément nuls (s'il en était ainsi, tous les trois coefficients seraient nuls et l'équation n'aurait pas de termes du second degré). Supposons que $A \neq 0$; nous allons considérer $A > 0$ (dans le cas contraire nous devons changer les signes de tous les termes).

Posons $\alpha = \sqrt{A}$, $\beta = \frac{B}{\alpha}$; on a $A = \alpha^2$, $B = \alpha\beta$. De là et de la condition $AC - B^2 = 0$, on trouve $C = \beta^2$. Conformément au n° 17 où nous avons rencontré pour la première fois μ_2, nous avons

$$\mu_2 = Dl_2 + Em_2;$$

ici $\{l_2; m_2\}$ est le vecteur définissant la direction principale correspondant au nombre caractéristique $\lambda_2 = 0$; de plus, $l_2^2 + m_2^2 = 1$. Portons $\lambda = \lambda_2 = 0$ dans le système (11) du § 2 et posons $A = \alpha^2$, $B = \alpha\beta$, $C = \beta^2$; le système prend la forme :

$$\alpha^2 l + \alpha\beta m = 0,$$
$$\alpha\beta l + \beta^2 m = 0.$$

On peut choisir pour solution de ce système les valeurs $l = -\beta$, $m = \alpha$. Normons cette solution, il vient :

$$l_2 = \frac{-\beta}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad m_2 = \frac{\alpha}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

D'autre part, l'équation caractéristique (12) du § 2 donne $\lambda_1 = A + C = \alpha^2 + \beta^2$. Par conséquent,

$$l_2 = \frac{-\beta}{\pm\sqrt{\lambda_1}}, \quad m_2 = \frac{\alpha}{\pm\sqrt{\lambda_1}},$$
$$\mu_2 = Dl_2 + Em_2 = \pm\frac{E\alpha - D\beta}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

Calculons le discriminant du premier membre de l'équation donnée :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & D \\ \alpha\beta & \beta^2 & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = D(\alpha\beta E - \beta^2 D) - E(\alpha^2 E - \alpha\beta D) =$$

$$= -E\alpha(E\alpha - D\beta) + D\beta(E\alpha - D\beta) = -(E\alpha - D\beta)^2.$$

Ainsi, $(E\alpha - D\beta)^2 = -\Delta$, d'où

$$\mu_2 = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1}},$$

ce que nous nous sommes proposé d'établir. Le radicande est ici non négatif, car $\Delta \leqslant 0$, $\lambda_1 > 0$.

On distinguera deux cas (en considérant $\delta = 0$) :

1) $\Delta \neq 0$; on a alors $\mu_2 \neq 0$ et l'équation (1) donnée définit une parabole (voir § 4). L'équation canonique de cette parabole s'écrit :

$$\lambda_1 x''^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1}}\, y'' = 0 ; \qquad (10)$$

le choix du signe dépend du choix de sens positif de l'axe d'ordonnées.

2) $\Delta = 0$; alors $\mu_2 = 0$ et l'on a un couple de droites (parabole dégénérée).

23. Nous pouvons maintenant énoncer la proposition générale : *l'équation* (1) *définit une conique dégénérée si et seulement si le discriminant du premier membre est nul* : $\Delta = 0$.

24. Exemple. Etant donnée l'équation

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0 ;$$

établir quelle courbe elle définit et la réduire à sa forme canonique.

Solution. On a $\delta = 9 > 0$, $\Delta = -81$, par conséquent, la courbe en question est une ellipse. Ecrivons l'équation caractéristique du groupe des termes du second degré : $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$; on en tire $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$. D'où l'équation canonique : $9x^2 + y^2 - 9 = 0$ (voir n° 20) ou encore

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

La courbe considérée est donc une ellipse réelle de demi-axes 3 et 1. Si, de plus, nous voulons connaître la disposition de cette ellipse, il nous faut trouver son centre et les directions principales

(fig. 4). Ecrivons l'équation du centre :

$$5x_0 + 4y_0 - 9 = 0,$$
$$4x_0 + 5y_0 - 9 = 0.$$

D'où $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Transférons l'origine des coordonnées en ce centre (sans tourner les axes) ; les coordonnées se transforment

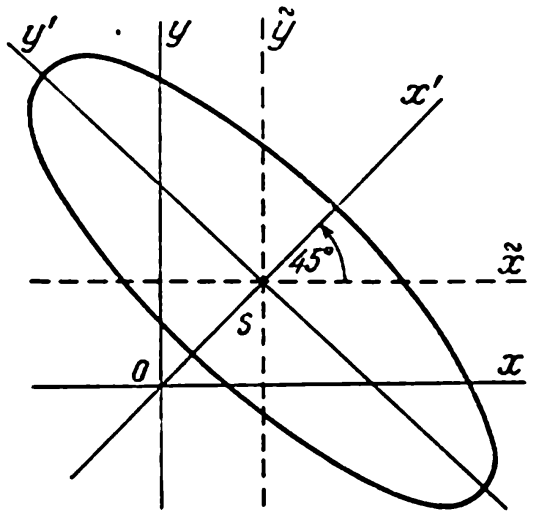

Fig. 4.

suivant les formules $x = \tilde{x} + 1$, $y = \tilde{y} + 1$ et l'équation prend la forme

$$5\tilde{x}^2 + 8\tilde{x}\tilde{y} + 5\tilde{y}^2 - 9 = 0 \qquad (*)$$

(voir n° 20).

Trouvons la direction principale correspondant au nombre caractéristique $\lambda_1 = 9$. Portons dans le système (11) du § 2 les valeurs $A = 5$, $B = 4$, $C = 5$, $\lambda = \lambda_1 = 9$; il vient

$$-4l + 4m = 0,$$
$$4l - 4m = 0.$$

Prenons comme solution de ce système $l = 1$, $m = 1$. L'angle α que forme cette direction principale avec l'axe $O\tilde{x}$ se définit aisément :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{l} = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Les axes doivent être donc tournés de 45° ; on en déduit les formules du changement de coordonnées correspondant :

$$\tilde{x} = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{y} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

La transformation de l'équation (*) suivant ces formules conduit à l'équation canonique $9x'^2 + y'^2 - 9 = 0$, on peut d'ailleurs s'en convaincre par vérification directe.

Exemple. Etant donnée l'équation

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0;$$

déterminer la courbe qu'elle définit, la réduire à sa forme canonique.

Solution. On a $\delta = 0$, $\Delta = -225$. On en conclut que l'équation donnée définit une parabole. Ecrivons l'équation caractéristique des termes du second degré: $\lambda^2 - 5\lambda = 0$; d'où $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 0$. Conformément au n° 22, l'équation canonique de la courbe considérée s'écrit $5x^2 \pm 6\sqrt{5}y = 0$. Si, en outre, nous nous intéressons à la disposition de notre parabole, il nous faudra trouver le système de coordonnées dans lequel son équation a la forme canonique.

Trouvons les directions principales de la parabole donnée (par rapport aux anciens axes). Dans ce cas le système (11) du § 2 pour $\lambda = \lambda_1 = 5$ s'écrit

$$-l - 2m = 0,$$
$$-2l - 4m = 0.$$

Prenons comme solution de ce système $l = -2$, $m = 1$. Le vecteur $\{-2; 1\}$ fait avec l'axe Ox un angle obtus. Si nous voulons tourner les axes d'un angle aigu, il nous faudra permuter les directions principales, en posant $\lambda_2 = 5$, $\lambda_1 = 0$. La solution trouvée donne alors la seconde direction principale; normons la solution, il vient

$$l_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad m_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

La première direction principale (correspondant au nombre $\lambda_1 = 0$) sera définie par

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad m_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Pour diriger les axes suivant ces directions principales il faut les tourner d'un angle α défini par $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Les formules de changement des coordonnées seront

$$x = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}.$$

En passant dans l'équation donnée aux nouvelles coordonnées on trouve

$$5y'^2 - 6\sqrt{5}\,x' - 2\sqrt{5}\,y' + 7 = 0.$$

Remarquons que le terme au carré se définit ici immédiatement en vertu de la théorie, puisque $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$; le terme constant

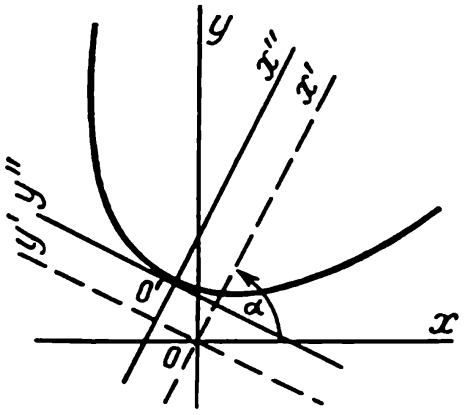

Fig. 5.

reste invariant (voir n° 15). Ainsi, c'est uniquement pour obtenir les termes du premier degré qu'on a eu besoin du changement en question.

Récrivons l'équation précédente sous la forme:

$$5\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 6\sqrt{5}\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0.$$

On voit maintenant qu'il faut effectuer le changement de coordonnées suivant:

$$x' = x'' + \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad y' = y'' + \frac{\sqrt{5}}{5}$$

de sorte que l'équation donnée s'écrit sous sa forme canonique

$$5y''^2 - 6\sqrt{5}\,x'' = 0.$$

L'origine du dernier système de coordonnées se trouve au sommet de cette parabole, de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ dans les axes x', y' et $\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$ dans les axes x, y. La parabole est représentée sur la figure 5.

CHAPITRE II

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ OU QUADRIQUES

§ 6. Transformation de coordonnées cartésiennes orthogonales dans l'espace

25. Soit un système de coordonnées cartésiennes d'axes Ox, Oy, Oz. Considérons un nouveau système de coordonnées d'origine au point O' dont les axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ sont respectivement parallèles aux anciens axes Ox, Oy, Oz et orientés dans le même sens (l'échelle est la même dans les deux systèmes). Supposons connues les coordonnées de la nouvelle origine O' $(a\,;\ b\,;\ c)$ dans l'ancien système. Alors

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b, \\ z &= z' + c, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où x, y, z sont les anciennes coordonnées d'un point arbitraire, x', y', z', ses nouvelles coordonnées. Les formules (1) expriment un changement de coordonnées par translation. La démonstration de ces formules est en fait évidente. En effet, les nouveaux axes étant parallèles aux anciens et décalés de a dans le sens de Ox, de b dans le sens de Oy et de c dans le sens de Oz, les abscisses de tous les points diminuent de a, les ordonnées de b et les cotes de c $(x' = x - a,$ etc.).

26. Etablissons maintenant les formules de changement des coordonnées cartésiennes orthogonales lorsque les nouveaux axes sont de même origine et de même échelle que les premiers, mais de directions quelconques, tout en restant deux à deux orthogonaux.

Soient Ox, Oy, Oz les anciens et Ox', Oy', Oz' les nouveaux axes de coordonnées. Supposons connu l'angle que forme chaque nouvel axe avec l'axe ancien respectif; représentons ces angles par le tableau suivant:

	Ox	Oy	Oz
Ox'	α_1	β_1	γ_1
Oy'	α_2	β_2	γ_2
Oz'	α_3	β_3	γ_3

(2)

Désignons par i, j, k et i', j', k' les vecteurs de base des anciens et des nouveaux axes. Décomposons chacun des vecteurs i', j', k' par rapport à l'ancienne base :

$$\left.\begin{aligned} i' &= l_1 i + m_1 j + n_1 k, \\ j' &= l_2 i + m_2 j + n_2 k, \\ k' &= l_3 i + m_3 j + n_3 k. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Comme les vecteurs i', j', k' sont unitaires, leurs composantes sont les cosinus directeurs. Ainsi, le tableau des coefficients des formules (3) sera donné par l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

dans laquelle $l_1 = \cos\alpha_1$, $m_1 = \cos\beta_1$, etc.

Soit M un point arbitraire de l'espace ; soient $(x\,;\ y\,;\ z)$ ses anciennes coordonnées et $(x'\,;\ y'\,;\ z')$ ses nouvelles coordonnées. On a l'égalité vectorielle

$$xi + yj + zk = x'i' + y'j' + z'k', \tag{5}$$

puisque ses deux membres représentent le développement d'un même vecteur OM (par rapport à des bases différentes). En remplaçant dans l'égalité (5) les vecteurs i', j', k' par leurs expressions (3) on obtient

$$\begin{aligned} xi + yj + zk = x'\,(l_1 i + m_1 j + n_1 k) + \\ + y'\,(l_2 i + m_2 j + n_2 k) + z'\,(l_3 i + m_3 j + n_3 k), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} xi + yj + zk = (l_1 x' + l_2 y' + l_3 z')\,i + \\ + (m_1 x' + m_2 y' + m_3 z')\,j + (n_1 x' + n_2 y' + n_3 z')\,k. \end{aligned} \tag{6}$$

Comme les composantes d'un vecteur par rapport à la base i, j, k sont uniques, (6) entraîne les trois égalités suivantes :

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \\ y &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ce sont précisément les formules cherchées. En y remplaçant les coefficients l_1, l_2, . . ., n_3 d'après (4), on trouve définitivement

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

27. Les formules (7) (ou (8)) expriment les anciennes coordonnées d'un point arbitraire en fonction de ses nouvelles coordonnées. Souvent on a besoin de formules inverses exprimant les nouvelles coordonnées par les anciennes. On obtient ces formules à partir de (7) en y intervertissant les nouvelles et les anciennes coordonnées et en transposant en conséquence les tableaux (2) et (4) (en permutant les lignes et les colonnes). On obtient

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1 x + m_1 y + n_1 z, \\ y' &= l_2 x + m_2 y + n_2 z, \\ z' &= l_3 x + m_3 y + n_3 z. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

28. Les coefficients $l_1, l_2, \ldots, n_3$ des formules (7) satisfont à certaines conditions. Trouvons-les. Remarquons tout d'abord que les nouveaux vecteurs de base i', j', k' sont unitaires; par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1, \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ensuite, les vecteurs i', j', k' étant deux à deux perpendiculaires, leurs produits scalaires deux à deux sont nuls:

$$\left.\begin{aligned} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0, \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0, \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Enfin, si les trièdres trirectangles i, j, k et i', j', k' sont tous deux directs (ou rétrogrades), le produit mixte $i'\,j'\,k'$ est positif et est égal au volume du cube unitaire, c'est-à-dire que $i'j'k' = 1$; par conséquent, on a dans ce cas

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 1. \tag{12a}$$

Si les trièdres trirectangles i, j, k et i', j', k' sont d'orientations contraires (l'un est direct, l'autre rétrograde) on a

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = -1. \tag{12b}$$

Il découle de ce qui précède qu'il existe deux sortes de changements de coordonnées cartésiennes orthogonales: ceux qui con-

servent l'orientation de la base des coordonnées et ceux qui ne la conservent pas. Les premiers se caractérisent par la condition (12 a), les seconds, par la condition (12 b).

Notons que les relations (10), (11) sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que les formules (7) expriment des changements de coordonnées rectangulaires (l'échelle étant inchangée). En effet, soit un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et soient les formules (7) avec des coefficients $l_1, l_2, \ldots, n_3$. Conformément à (3), construisons à partir de ces coefficients les vecteurs i', j', k'. Si les conditions (10) sont satisfaites, les vecteurs i', j', k' sont tous unitaires. Si sont remplies les conditions (11), les vecteurs i', j', k' sont deux à deux perpendiculaires. On en déduit que, sous les conditions (10), (11), on passe effectivement à un nouveau système de coordonnées, également rectangulaire et de même échelle. Quant à l'orientation de la base, on s'assure aisément si elle se conserve ou non, en vérifiant laquelle des conditions (12a) et (12b) est satisfaite.

29. Si O' $(a; b; c)$ est la nouvelle origine et les directions d'axes changent, on a le changement de coordonnées

$$x = l_1x' + l_2y' + l_3z' + a,$$
$$y = m_1x' + m_2y' + m_3z' + b,$$
$$z = n_1x' + n_2y' + n_3z' + c,$$

où les coefficients $l_1, l_2, \ldots, n_3$ se définissent conformément à (4) à l'aide du tableau (2).

§ 7. Quelques conclusions générales découlant des formules de changement de coordonnées

30. Les formules de changement des coordonnées cartésiennes orthogonales dans l'espace permettent de démontrer le théorème suivant :

Si, dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales quelconque, une surface est définie par une équation algébrique de degré n, dans tout autre système de coordonnées cartésiennes orthogonales elle sera également définie par une équation algébrique de degré n.

La démonstration de ce théorème est en tout point analogue à celle du théorème (8), n° 49 de notre « Cours ».

31. Il découle directement du théorème précédent que la ligne d'intersection d'une quadrique avec un plan est une ligne dont l'ordre n'est pas supérieur à deux.

Démonstration. Soient une quadrique quelconque et un plan α. Choisissons un système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axes Ox et Oy dans le plan α. En vertu du n° 30, la quadrique considérée sera définie, dans le système de coordonnées choisi, comme, d'ailleurs, dans tout autre système cartésien orthogonal, par une équation du second degré:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + \\ + 2Hy + 2Kz + L = 0. \quad (1)$$

L'équation du plan α dans ce système de coordonnées est $z = 0$. La ligne d'intersection de la quadrique avec le plan α est définie par l'équation (1) conjointement avec l'équation $z = 0$. En posant dans l'équation (1) $z = 0$, on a

$$Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2Gx + 2Hy + L = 0. \quad (2)$$

Nous avons obtenu l'équation de la ligne d'intersection de la quadrique avec le plan α dans le système de coordonnées défini dans le plan α par les axes Ox, Oy. Or, l'équation (2) est une équation algébrique de degré non supérieur à deux. Le théorème est donc démontré.

Remarque. Le degré de l'équation (2) peut être inférieur à deux; ceci se produit notamment lorsque A, B et D s'annulent. Un cylindre parabolique, par exemple, coupe son plan de symétrie suivant une droite, c'est-à-dire suivant une ligne du premier degré. Mais ces cas sont des exceptions; en général, une quadrique coupe un plan suivant une conique.

32. Le cône de révolution est une quadrique. Il découle de ce qui vient d'être dit que tout plan ne passant pas par le sommet du cône de révolution coupe ce cône suivant une conique non dégénérée, c'est-à-dire suivant une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Ceci prouve la justesse du théorème 14 du « Cours » que nous avons simplement énoncé sans en donner la démonstration.

§ 8. Réduction à la forme canonique de l'équation d'une quadrique centrée à l'origine des coordonnées

33. Dans ce qui suit nous allons nous occuper de la simplification de l'équation générale d'une quadrique par changement de coordonnées. Pour simplifier les calculs et les transformations, nous nous servirons d'une notation plus commode de l'équation générale du second degré en trois variables x, y, z. Nous avons toujours désigné les coefficients d'une telle équation par des

lettres différentes, au total dix. Les formules que nous allons déduire et où ces lettres entreront dans différentes combinaisons seront très difficiles à retenir. Aussi est-il plus rationnel d'employer un autre système de notations où tous les coefficients se notent par une même lettre affectée de deux chiffres en bas (qu'on appelle indices). Dans ces notations l'équation générale du second degré en x, y, z s'écrit :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (1)$$

Le principe de désignation des coefficients est le suivant : on affecte un coefficient de l'indice 1, 2 ou 3 autant de fois qu'il est multiplié respectivement par x, y ou z ; l'indice supplémentaire est 4. Ainsi, le coefficient de x^2 a pour indice 11 (lire « un un ») puisque $x^2 = x \cdot x$; le coefficient de xz sera indicié par 13 ; le coefficient de x, par 14 ; l'indice du terme constant est 44. L'ordre de succession des indices importe peu, c'est-à-dire que $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, etc. On appelle coefficients de l'équation (1) les nombres a_{11}, a_{22}, . . ., a_{12}, . . ., a_{44} (bien que, strictement parlant, le nombre a_{12}, par exemple, est égal à la moitié du coefficient de xy). L'identité qui suit explique pourquoi certains coefficients sont multipliés par 2 :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = \\ = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})\,x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})\,y + \\ + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})\,z + (a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}). \quad (2)$$

On voit que du quatrième au neuvième, les termes du premier membre se composent de deux termes identiques.

34. Dans ce paragraphe nous allons considérer une équation incomplète du second degré de la forme :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = H. \quad (3)$$

La particularité de cette équation est l'absence de termes du premier degré. On en déduit que le premier membre de (3) ne change pas si l'on remplace x, y, z par $-x$, $-y$, $-z$ et donc si un point $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à la quadrique (3), le point $N\,(-x\,;\,-y\,;\,-z)$ lui appartiendra également. Autrement dit, chaque point de la quadrique (3) possède un point symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. Donc, si une quadrique est donnée par une équation de la forme (3), alors 1) elle possède un centre (de symétrie) ; 2) ce centre est situé à l'origine des coordonnées.

35. Le premier membre de l'équation (3)

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz \qquad (4)$$

représente un polynôme homogène du second degré (c'est-à-dire un polynôme composé uniquement de termes du second degré). Un tel polynôme est dit forme quadratique en trois variables x, y, z. Réduisons la forme quadratique (4) à sa forme canonique. Le problème consiste dans ce qui suit: il faut tourner les axes de coordonnées de façon à éliminer de l'expression de la forme (4) réduite aux nouveaux axes (rectangulaires) les termes contenant les produits des nouvelles coordonnées actuelles. Conformément au § 6, il s'agit de trouver des formules

$$\left.\begin{aligned} x&=l_1x'+l_2y'+l_3z',\\ y&=m_1x'+m_2y'+m_3z',\\ z&=n_1x'+n_2y'+n_3z', \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

telles que l'on ait l'identité

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz= \\ =\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2. \qquad (6)$$

Ceci veut dire qu'après substitution des x, y, z selon les formules (5), la forme quadratique donnée aura la forme du second membre de (6), dite *forme canonique*. Le choix des coefficients des formules (5) doit être régi par les conditions (10), (11) et (12a) du § 6.

En réduisant la forme quadratique (4) à sa forme canonique, on ramène par là même à sa forme canonique l'équation (3). Nous allons démontrer que chaque forme quadratique (4) (et donc chaque équation (3)) se réduit à sa forme canonique.

36. Supposons tout d'abord que les coefficients des formules (5) soient trouvés et que l'identité (6) ait lieu. Récrivons-la comme suit:

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)\,x+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)\,y+ \\ +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)\,z=\lambda_1x'x'+\lambda_2y'y'+\lambda_3z'z'. \qquad (7)$$

Transformons maintenant chaque parenthèse de (7) d'après les formules (5):

$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=&(a_{11}l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1)x'+\\ &+(a_{11}l_2+a_{12}m_2+a_{13}n_2)\,y'+\\ &+(a_{11}l_3+a_{12}m_3+a_{13}n_3)\,z'\,; \end{aligned} \qquad (8)$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = (a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)\,x' + (a_{21}l_2 + a_{22}m_2 + a_{23}n_2)\,y' + (a_{21}l_3 + a_{22}m_3 + a_{23}n_3)\,z'\,; \tag{9}$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = (a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)\,x' + (a_{31}l_2 + a_{32}m_2 + a_{33}n_2)\,y' + (a_{31}l_3 + a_{32}m_3 + a_{33}n_3)\,z'. \tag{10}$$

Utilisons ensuite les formules inverses de changement de coordonnées :

$$x' = l_1x + m_1y + n_1z,$$
$$y' = l_2x + m_2y + n_2z,$$
$$z' = l_3x + m_3y + n_3z.$$

D'où

$$\left.\begin{aligned} x'x' &= l_1xx' + m_1yx' + n_1zx', \\ y'y' &= l_2xy' + m_2yy' + n_2zy', \\ z'z' &= l_3xz' + m_3yz' + n_3zz'. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

En portant les expressions (8), (9), (10) dans le premier membre de (7), on obtient à gauche neuf termes différents ; si l'on porte dans le second membre de (7) les expressions (11) on obtient à droite neuf termes analogues. L'identité (7) est réalisée si les coefficients des termes semblables à gauche et à droite sont identiques ; en même temps sera vérifiée l'identité (6). Ainsi, pour que soit réalisée l'identité (6) il suffit de choisir les coefficients des formules (5) et les nombres λ_1, λ_2, λ_3 tels que

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1 &= \lambda_1 l_1, \\ a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1 &= \lambda_1 m_1, \\ a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1 &= \lambda_1 n_1\,; \end{aligned}\right\} \tag{12a}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l_2 + a_{12}m_2 + a_{13}n_2 &= \lambda_2 l_2, \\ a_{21}l_2 + a_{22}m_2 + a_{23}n_2 &= \lambda_2 m_2, \\ a_{31}l_2 + a_{32}m_2 + a_{33}n_2 &= \lambda_2 n_2\,; \end{aligned}\right\} \tag{12b}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l_3 + a_{12}m_3 + a_{13}n_3 &= \lambda_3 l_3, \\ a_{21}l_3 + a_{22}m_3 + a_{23}n_3 &= \lambda_3 m_3, \\ a_{31}l_3 + a_{32}m_3 + a_{33}n_3 &= \lambda_3 n_3. \end{aligned}\right\} \tag{12c}$$

Tout se ramène donc au système d'équations

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n &= \lambda l, \\ a_{12}l + a_{22}m + a_{23}n &= \lambda m, \\ a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n &= \lambda n. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

La résolution est achevée si l'on trouve trois solutions l_1, m_1, n_1, λ_1, l_2, m_2, n_2, λ_2 et l_3, m_3, n_3, λ_3 du système (13) vérifiant les conditions (10) à (12a) du § 6.

37. Occupons-nous du système (13). Ecrivons-le sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\,l + a_{12}m + a_{13}n &= 0,\\ a_{21}l + (a_{22}-\lambda)\,m + a_{23}n &= 0,\\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33}-\lambda)\,n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

D'où

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

puisque dans le cas contraire on aurait $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ (voir le « Cours », Appendice, § 5, n° 16).

L'équation (15) est une équation du troisième degré, qui nous fournira les valeurs $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$, lesquelles portées dans le système (14) nous permettront de trouver les valeurs cherchées de l_1, m_1, n_1, etc. Il est essentiel que les racines de l'équation (15) sont toutes réelles. Cette proposition sera démontrée au n° suivant.

38. Soit $\lambda = \lambda_1$ une racine de l'équation (15). En résolvant le système (14) pour $\lambda = \lambda_1$ on obtiendra une solution non nulle (étant donné que le déterminant du système est nul). Désignons cette solution par l_1, m_1, n_1. Si $\lambda = \lambda_2$ est une autre racine du système (15), on déterminera de façon analogue la solution non nulle du système (14) correspondant à λ_2 que nous désignerons par l_2, m_2, n_2.

L e m m e. *Si les racines* λ_1, λ_2 *de l'équation* (15) *sont distinctes*, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *les solutions correspondantes du système* (14) *vérifient la condition d'orthogonalité* :

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

D é m o n s t r a t i o n. Notons avant tout que les nombres l_1, m_1, n_1 vérifient les égalités (12a) car ils sont obtenus de (14) ; de même, les nombres l_2, m_2, n_2 vérifient (12b). Multiplions la première, la seconde et la troisième égalités (12a) respectivement par l_2, m_2, n_2 et ajoutons-les terme à terme ; nous obtiendrons au second membre $\lambda_1 (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)$. En multipliant les égalités (12b) respectivement par l_1, m_1, n_1 et en les ajoutant terme à terme, nous obtiendrons au second membre $\lambda_2 (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)$. Au premier membre on aura dans les deux cas

une même quantité, étant donné que $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ et $a_{23} = a_{32}$. Par conséquent,

$$\lambda_1 (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = \lambda_2 (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2).$$

D'où

$$(\lambda_2 - \lambda_1) (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = 0,$$

mais comme $\lambda_2 \neq \lambda_1$, on a $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème. *Toutes les racines de l'équation* (15) *sont réelles.*

Démonstration. Démontrons le théorème par l'absurde. Supposons que l'équation (15) a une racine complexe $\lambda_1 = \alpha + \beta i$; $\beta \neq 0$. Alors, les coefficients de l'équation (15) étant réels, celle-ci doit avoir encore une racine complexe $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ (conjuguée de la première). A la racine λ_1 correspond une solution non nulle du système (14). Comme λ_1 est un nombre complexe, la substitution $\lambda = \lambda_1 = \alpha + \beta i$ dans le système (14) conduira à ce que certains coefficients de ce système seront des nombres complexes; par conséquent, la solution non nulle du système (14) correspondant à la racine $\lambda = \lambda_1$ sera représentée par des nombres complexes:

$$l_1 = l + il', \quad m_1 = m + im', \quad n_1 = n + in'.$$

Le nombre $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ étant conjugué de $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, à la racine $\lambda = \lambda_2$ correspondra la solution l_2, m_2, n_2 conjuguée de la solution l_1, m_1, n_1, c'est-à-dire que l'on aura

$$l_2 = l - il', \quad m_2 = m - im', \quad n_2 = n - in'.$$

Comme $\beta \neq 0$, les racines $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ et $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ sont distinctes; or, en vertu du lemme, on a

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

On en déduit

$$l^2 + l'^2 + m^2 + m'^2 + n^2 + n'^2 = 0.$$

Par conséquent,

$$l = 0, \quad l' = 0, \quad m = 0, \quad m' = 0, \quad n = 0, \quad n' = 0.$$

Ceci signifie que $l_1 = 0$, $m_1 = 0$, $n_1 = 0$. D'autre part, l_1, m_1, n_1 est une solution non nulle du système (14). Nous sommes donc arrivés à une contradiction qui nous oblige à rejeter l'hypothèse d'existence d'une racine complexe.

Remarque. La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme énoncé plus haut. Dans la démonstration du lemme

est essentiellement utilisée la condition de symétrie des éléments du déterminant (15) par rapport à sa diagonale principale : $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$. Sans cette condition les propositions du lemme et du théorème ne sont pas vraies. Par exemple, l'équation

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

admet les racines $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$, dont deux complexes. Le théorème n'est pas valable dans ce cas, car $a_{23} = 1$, $a_{32} = -1$, $a_{23} \neq a_{32}$.

39. L'équation (15) est dite *équation caractéristique* de la forme quadratique (4). Les racines λ_1, λ_2, λ_3 (toujours réelles) de l'équation (15) sont dites *nombres caractéristiques* de la forme (4) ; ces mêmes nombres s'obtiennent comme coefficients de la forme canonique à laquelle se réduit la forme quadratique considérée.

En faisant dans le système (14) $\lambda = \lambda_1$, celui-ci admettra la solution non nulle l, m, n. La direction du vecteur $\{l; m; n\}$ s'appelle *direction principale* correspondant au nombre caractéristique λ_1 de la forme quadratique donnée. Il est clair que le vecteur $\{l_1; m_1; n_1\}$ où $l_1 = \mu l$, $m_1 = \mu m$, $n_1 = \mu n$ (où μ est un nombre quelconque non nul) a la même orientation que la direction principale correspondant à λ_1. Posons

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

alors

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1.$$

La solution l_1, m_1, n_1 du système (14) vérifiant la condition ci-dessus est dite normée. Le vecteur $\{l_1; m_1; n_1\}$ est le vecteur unitaire de la direction principale correspondant au nombre λ_1. De façon analogue, en résolvant le système pour $\lambda = \lambda_2$ et $\lambda = \lambda_3$ et en normant la solution, on obtient les vecteurs unitaires $\{l_2; m_2; n_2\}$ et $\{l_3; m_3; n_3\}$ des directions principales associées aux nombres caractéristiques $\lambda = \lambda_2$ et $\lambda = \lambda_3$. A présent nous disposons de tout ce qu'il faut pour démontrer que toute forme quadratique (4) peut être réduite à sa forme canonique par changement de coordonnées rectangulaires.

40. P r e m i e r c a s. Les nombres caractéristiques λ_1, λ_2, λ_3 sont tous distincts. Alors chacun d'eux détermine une direction principale, de plus, les directions correspondant à deux quelconques de ces nombres caractéristiques sont orthogonales (voir

lemme du n° 38). Les vecteurs unitaires de ces directions

$$i' = \{l_1;\ m_1;\ n_1\},$$
$$j' = \{l_2;\ m_2;\ n_2\},$$
$$k' = \{l_3;\ m_3;\ n_3\}$$

se déterminent à partir du système (14) comme indiqué au n° 39. Si nous prenons ces vecteurs pour vecteurs de base du nouveau système de coordonnées, alors la forme quadratique se ramène à la forme canonique: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$ (ce qui est clair car seront vérifiées les égalités (12), et, donc, l'identité (6)).

Le passage aux nouveaux axes est donné par les formules (5). Les conditions (10) du § 6 seront vérifiées grâce à la normalisation des solutions du système (14); les conditions (11) du § 6 sont observées car i', j', k' sont deux à deux orthogonaux; pour satisfaire la condition (12a) du § 6 il convient de choisir de façon appropriée les signes des solutions normées du système (14) (si les signes sont choisis arbitrairement et s'il s'avère que la condition (12a) n'est pas satisfaite, il suffit de changer les signes des nombres l_1, m_1, n_1, par exemple).

41. Deuxième cas. Deux nombres caractéristiques sont égaux et différents du troisième (autrement dit, l'équation caractéristique (15) a une racine double). Supposons que $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. On a la proposition suivante: *si l'on porte dans le système* (14) *la racine double* $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ *de l'équation* (15), *le système* (14) *se ramène à une seule équation essentielle* (toutes les autres équations en découlent). Pour le moment nous acceptons cette proposition, en en remettant la démonstration au n° 44. Admettons pour fixer les idées que pour $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ l'équation essentielle du système (14) est

$$(a_{11} - \lambda)\, l + a_{12} m + a_{13} n = 0. \tag{16}$$

En disant que cette équation est essentielle nous entendons par là qu'elle n'est pas une identité, c'est-à-dire que les nombres $a_{11} - \lambda$, a_{12}, a_{13} ne sont pas tous nuls, ce qui signifie que le vecteur $\{a_{11} - \lambda;\ a_{12};\ a_{13}\}$ est non nul. Toute solution non nulle l, m, n de l'équation (16) définit un vecteur $\{l;\ m;\ n\}$ dont la direction est la direction principale correspondant au nombre caractéristique $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Si l'on tient compte du fait que l'équation (16) exprime la condition d'orthogonalité des vecteurs $\{l;\ m;\ n\}$ et $\{a_{11} - \lambda;\ a_{12};\ a_{13}\}$, on en déduit qu'au nombre caractéristique $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ correspond une infinité de directions principales, notamment toute direction perpendiculaire au vecteur $\{a_{11} - \lambda;\ a_{12};\ a_{13}\}$ est une direction principale définie par le

nombre $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Il en découle que le vecteur $\{a_{11} - \lambda; a_{12}; a_{13}\}$ est orienté suivant la direction principale correspondant au nombre $\lambda = \lambda_3$.

Il est clair maintenant que dans le cas $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ on peut trouver trois vecteurs unitaires qui soient dirigés suivant les directions principales de la forme donnée et soient deux à deux perpendiculaires. Pour cela il convient de procéder comme suit. En portant dans le système (14) le nombre $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, on trouve deux solutions normées quelconques l_1, m_1, n_1 et l_2, m_2, n_2 vérifiant la condition d'orthogonalité $(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0)$. On obtient ainsi deux vecteurs unitaires

$$i' = \{l_1; m_1; n_1\}, \quad j' = \{l_2; m_2; n_2\}.$$

En résolvant le système (14) pour $\lambda = \lambda_3$ et en normant la solution on trouve le troisième vecteur unitaire

$$k' = \{l_3; m_3; n_3\}.$$

Si l'on choisit i', j', k' comme base du nouveau système de coordonnées, la forme quadratique considérée aura dans ces nouveaux axes la forme canonique

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = \lambda (x'^2 + y'^2) + \lambda_3 z'^2 \quad (\text{où } \lambda = \lambda_1 = \lambda_2).$$

I n d i c a t i o n. Dans la pratique il est plus commode de trouver tout d'abord le vecteur i' (c'est-à-dire une solution normée l_1, m_1, n_1 du système (14) pour $\lambda = \lambda_1$), puis le vecteur k'; ceci fait, le vecteur j' s'obtient comme produit vectoriel de k' par i'. Notons encore que pour déterminer k' on n'a pas besoin de résoudre le système (14), puisque l'on sait déjà que la direction de k', c'est-à-dire la troisième direction principale, est donnée par le vecteur $\{a_{11} - \lambda; a_{12}; a_{13}\}$ pour $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

42. T r o i s i è m e c a s. Les trois nombres caractéristiques sont égaux: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, c'est-à-dire que l'équation caractéristique (15) admet une racine triple.

On a la proposition suivante: *si l'on porte dans le système* (14) *la racine triple* $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ *de l'équation* (15), *toutes les équations du système* (14) *deviennent identités.* Si donc, les nombres caractéristiques d'une forme quadratique sont égaux, toute direction est une direction principale. Pour le moment, admettons cette proposition et remettons sa démonstration au n° 44.

Comme pour $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ le système (14) se ramène à des identités, tous ses coefficients s'annulent, et on obtient $a_{11} - \lambda = 0$, $a_{22} - \lambda = 0$, $a_{33} - \lambda = 0$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Par conséquent, la forme donnée se présente déjà sous la forme canonique: $\lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 = \lambda (x^2 + y^2 + z^2)$ et n'exige donc

aucune transformation. Toutefois, on peut tourner arbitrairement le système de coordonnées sans que la forme canonique de l'équation considérée en soit altérée.

43. C o n c l u s i o n g é n é r a l e. *Chaque forme quadratique peut être ramenée à sa forme canonique par un changement des coordonnées rectangulaires.* Pour réduire une forme quadratique donnée à sa forme canonique, il y a lieu de résoudre l'équation (15) et trouver les nombres caractéristiques λ_1, λ_2, λ_3; ce sont précisément les coefficients de la forme canonique cherchée. Les axes de coordonnées doivent être orientés suivant les directions principales de la forme. Si les axes d'abscisses, d'ordonnées et de cotes sont orientés respectivement suivant la première, la seconde et la troisième directions principales, alors λ_1 sera le coefficient du carré de l'abscisse, λ_2 celui du carré de l'ordonnée et λ_3 celui du carré de la cote.

Il est clair qu'on a donné en même temps la règle de réduction à sa forme canonique de l'équation d'une quadrique (1), vu que son premier membre est une forme quadratique.

E x e m p l e. Réduire à sa forme canonique l'équation de la quadrique :

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 18 = 0. \qquad (17)$$

S o l u t i o n. Formons tout d'abord l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$. Les racines de cette équation sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Nous sommes maintenant en mesure d'écrire l'équation canonique de la quadrique donnée : $3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 18 = 0$ ou

$$\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{3} + \frac{z'^2}{2} = 1.$$

Il s'agit donc d'un ellipsoïde de demi-axes $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$.

Si nous nous intéressons en outre à la disposition de notre ellipsoïde, il nous faut trouver le changement de coordonnées réduisant l'équation (17) à sa forme canonique ; autrement dit, nous devons trouver les directions principales de la quadrique.

Formons le système d'équations (14) avec les données du problème:

$$\left.\begin{aligned} (7-\lambda)\,l \quad -2m \qquad\qquad &= 0,\\ -2l+(6-\lambda)\quad m-2 \quad n &= 0,\\ -2m+(5-\lambda)\,n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

En posant ici $\lambda = \lambda_1 = 3$ nous obtenons

$$\begin{aligned} 4l - 2m \qquad &= 0,\\ -2l + 3m - 2n &= 0,\\ -2m + 2n &= 0. \end{aligned}$$

Choisissons comme solution non nulle de ce système la solution $l = 1$, $m = 2$, $n = 2$ par exemple; en normant cette solution nous obtenons le vecteur unitaire de la première direction principale:

$$i' = \{l_1;\ m_1;\ n_1\} = \left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right\}.$$

De façon analogue, en posant dans le système (18) $\lambda = \lambda_2 = 6$ et $\lambda = \lambda_3 = 9$, nous trouvons les vecteurs unitaires des deux autres directions principales:

$$j' = \{l_2;\ m_2;\ n_2\} = \left\{\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right\},$$

$$k' = \{l_3;\ m_3;\ n_3\} = \left\{-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{1}{3}\right\}.$$

Connaissant maintenant la position des nouveaux axes par rapport aux anciens, nous connaissons en même temps la disposition de la quadrique. Les formules de changement des coordonnées s'obtiennent à partir des égalités (5):

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z',\\ y &= \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z',\\ z &= \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z'. \end{aligned}$$

Remarquons que le déterminant qui est composé des coordonnées des vecteurs i, j, k est égal à $+1$; ainsi donc, la condition (12a) du § 6 est vérifiée. Ceci veut dire que nous avons passé aux nouvelles coordonnées en conservant l'orientation des anciens axes.

Exemple. Réduire à sa forme canonique l'équation de la quadrique:

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0. \tag{19}$$

Solution. Formons l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$. Les racines de cette équation sont $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 6$. L'équation canonique de cette quadrique s'écrit immédiatement : $-3x'^2 - 3y'^2 + 6z^2 + 6 = 0$ ou

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{1} = 1.$$

Il s'agit d'un hyperboloïde de rotation à une nappe de demi-axes $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$.

Cherchons maintenant les directions principales de la quadrique donnée et le changement de coordonnées ramenant l'équation initiale à sa forme canonique. L'équation caractéristique ayant une racine double, il faut suivre les indications du n° 41. Formons dans notre cas le système d'équations (14) :

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\,l &+ 2m &&- 4n = 0, \\ 2l &+ (-2-\lambda)\,m &&- 2n = 0, \\ -4l &&- 2m &+ (1-\lambda)\,n = 0. \end{aligned}$$

Portons dans ce système la racine double de l'équation caractéristique $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -3$; il vient

$$\begin{aligned} 4l + 2m - 4n &= 0, \\ 2l + m - 2n &= 0, \\ -4l - 2m + 4n &= 0. \end{aligned}$$

Le système s'est donc ramené à une seule équation essentielle

$$2l + m - 2n = 0 \qquad (20)$$

(les deux autres lui étant proportionnelles, voir n° 41). En choisissant comme solution de l'équation (20) la solution $l = 1$, $m = 2$, $n = 2$, nous obtenons le vecteur $\{1 ; 2 ; 2\}$ qui définit une direction principale parmi l'infinité correspondant au nombre $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -3$. D'autre part, conformément au n° 41, le vecteur $\{2 ; 1 ; -2\}$ défini par les coefficients de l'équation (20) donne la troisième direction principale (correspondant au nombre $\lambda = \lambda_3 = 6$). En faisant le produit vectoriel de $\{2 ; 1 ; -2\}$ par $\{1 ; 2 ; 2\}$ on obtient le vecteur $\{6 ; -6 ; 3\}$ qui définit lui aussi la direction principale correspondant au nombre $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -3$ (qui est différente de la direction trouvée précédemment

et lui est perpendiculaire). Au lieu de ce dernier vecteur il est plus commode de prendre $\{2; -2; 1\}$. En normant les vecteurs trouvés et en les disposant dans l'ordre approprié, on obtient

$$i' = \{l_1; m_1; n_1\} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\},$$

$$j' = \{l_2; m_2; n_2\} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\},$$

$$k' = \{l_3; m_3; n_3\} = \left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}.$$

On en déduit les formules du changement de coordonnées cherché :

$$x = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z',$$

$$y = \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z',$$

$$z = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'.$$

44. Voyons maintenant la démonstration des propositions formulées aux n^{os} 41 et 42. Etablissons au préalable les lemmes suivants.

L e m m e 1. *Soient vérifiées les égalités*:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0, \tag{21}$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Alors, si le déterminant (21) *est symétrique par rapport à la diagonale principale, c'est-à-dire si* $b_{12} = b_{21}$, $b_{13} = b_{31}$, $b_{23} = b_{32}$, *toutes les lignes du déterminant* (21) *sont proportionnelles à une de ses lignes.*

D é m o n s t r a t i o n. Nous allons démontrer le lemme par l'absurde. Supposons que le déterminant (21) possède deux lignes qui ne soient pas proportionnelles; pour fixer les idées supposons que ce soient les deux premières lignes. Nous allons voir que cette hypothèse contredit les conditions du lemme.

Considérons les vecteurs $\{b_{11}; b_{12}; b_{13}\}$, $\{b_{21}; b_{22}; b_{23}\}$, $\{b_{31}; b_{32}; b_{33}\}$. Notre hypothèse signifie que les deux premiers de ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Or, d'après l'égalité (21),

tous ces vecteurs sont coplanaires (voir notre « Cours », n° 185); dans ce cas le troisième vecteur peut être décomposé suivant les deux premiers (voir le « Cours », n° 159):

$$\{b_{31}; b_{32}; b_{33}\} = \lambda \{b_{11}; b_{12}; b_{13}\} + \mu \{b_{21}; b_{22}; b_{23}\}.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} b_{31} &= \lambda b_{11} + \mu b_{21}, \\ b_{32} &= \lambda b_{12} + \mu b_{22}, \\ b_{33} &= \lambda b_{13} + \mu b_{23}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

En utilisant la condition de symétrie du déterminant donné et les égalités (23), on trouve

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ \lambda b_{11} + \mu b_{21} & \lambda b_{13} + \mu b_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \mu \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} b_{11} & \lambda b_{11} + \mu b_{21} \\ b_{21} & \lambda b_{12} + \mu b_{22} \end{vmatrix} = \mu^2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

De façon analogue,

$$\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

En remplaçant dans le premier membre de (22) le second et le troisième déterminants par leurs expressions trouvées ci-dessus, on obtient

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} (1 + \mu^2 + \lambda^2) = 0.$$

D'où

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Ensuite, on a

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \lambda b_{11} + \mu b_{21} \\ b_{21} & \lambda b_{12} + \mu b_{22} \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{12} & \lambda b_{11} + \mu b_{21} \\ b_{22} & \lambda b_{12} + \mu b_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, nous avons obtenu trois égalités

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

Or, ces égalités traduisent la proportionnalité des deux premières lignes du déterminant (21). Donc, les conditions du lemme excluent la non-proportionnalité des deux premières lignes. Nous serions arrivés à la même contradiction si nous avions admis la non-proportionnalité de deux autres lignes. Le lemme est démontré.

L e m m e 2. *Si sont réalisées les conditions du premier lemme et si en outre*

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0, \tag{24}$$

alors tous les éléments du déterminant (21) *sont nuls.*

D é m o n s t r a t i o n. Comme les conditions du premier lemme sont vérifiées, nous pouvons l'utiliser; en vertu de ce lemme toutes les lignes du déterminant (21) sont proportionnelles et, donc, tous les mineurs du second ordre de ce déterminant sont nuls. En particulier,

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

D'où

$$b_{11}b_{22} = b_{12}^2, \quad b_{11}b_{33} = b_{13}^2, \quad b_{22}b_{33} = b_{23}^2. \tag{25}$$

Il en découle que $b_{11}b_{22} \geqslant 0$, $b_{11}b_{33} \geqslant 0$, $b_{22}b_{33} \geqslant 0$; par conséquent, les nombres b_{11}, b_{22}, b_{33} ne peuvent pas être de signes contraires. Mais alors (24) implique que $b_{11} = 0$, $b_{22} = 0$, $b_{33} = 0$. Ceci étant, on déduit sans peine de (25) que $b_{12} = 0$, $b_{13} = 0$, $b_{23} = 0$. Le lemme est ainsi démontré.

Nous aurons encore besoin de certains résultats de l'algèbre des polynômes. Soit un polynôme du troisième degré:

$$f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c. \tag{26}$$

On sait qu'on peut le représenter sous la forme:

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3), \tag{27}$$

où λ_1, λ_2, λ_3 sont des nombres déterminés dits racines de ce polynôme. Si $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, alors $\lambda_1 = \lambda_2$ est racine double du polynôme; dans ce cas

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_3). \tag{28}$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, le polynôme admet une racine triple et s'écrit comme suit:

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3. \tag{29}$$

On a les propositions suivantes:

1) Si λ_1 est une racine du polynôme donné, alors en posant dans (26) $\lambda = \lambda_1$ on doit obtenir

$$f(\lambda_1) = 0.$$

Ceci découle immédiatement de (27).

2) Si λ_1 est une racine double, alors pour $\lambda = \lambda_1$ s'annule non seulement le polynôme mais aussi sa dérivée première:

$$f(\lambda_1) = 0, \quad f'(\lambda_1) = 0,$$

cependant $f''(\lambda_1) \neq 0$. Pour démontrer cette proposition il suffit de dériver (28):

$$f'(\lambda) = 2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3) + (\lambda - \lambda_1)^2.$$

En portant dans cette expression $\lambda = \lambda_1$ on trouve que $f'(\lambda_1) = 0$. Comme

$$f''(\lambda) = 2(\lambda - \lambda_3) + 4(\lambda - \lambda_1) \text{ et } \lambda_1 \neq \lambda_3, \text{ alors } f''(\lambda_1) \neq 0.$$

3) Si λ_1 est une racine triple, on a

$$f(\lambda_1) = 0, \quad f'(\lambda_1) = 0, \quad f''(\lambda_1) = 0$$

(cependant $f'''(\lambda_1) \neq 0$). Pour prouver qu'il en est ainsi il suffit de dériver (29):

$$f'(\lambda) = 3(\lambda - \lambda_1)^2, \quad f''(\lambda) = 6(\lambda - \lambda_1).$$

En posant $\lambda = \lambda_1$ on trouve: $f'(\lambda_1) = 0$, $f''(\lambda_1) = 0$ ($f'''(\lambda_1) = 6 \neq 0$). Dans ce qui suit nous allons utiliser ces caractères de multiplicité d'une racine.

Revenons aux propositions énoncées aux n^{os} 41 et 42 que nous avons acceptées sans démonstration.

Désignons par $f(\lambda)$ le polynôme du troisième degré écrit au premier membre de l'équation caractéristique de la forme quadratique donnée:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}. \tag{30}$$

Calculons la dérivée première du polynôme $l(\lambda)$:

$$f'(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -1 \end{vmatrix}.$$

En développant ces déterminants on trouve

$$f'(\lambda) = -\left(\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}\right).$$

D'où

$$f''(\lambda) = 2[(a_{11}-\lambda)+(a_{22}-\lambda)+(a_{33}-\lambda)].$$

Examinons maintenant les cas possibles de multiplicité d'une racine de l'équation caractéristique de la forme donnée que nous avons évoqués aux n^{os} 41, 42.

1) Soit λ_1 une racine double de l'équation caractéristique. Alors

$$f(\lambda_1) = 0, \quad f'(\lambda_1) = 0.$$

Ainsi donc, pour $\lambda = \lambda_1$ le déterminant (30) vérifie les conditions du lemme 1 du présent n° (en posant $b_{11} = a_{11} - \lambda$, $b_{12} = a_{12}$, etc.). En appliquant le lemme nous constatons que toutes les lignes du déterminant (30) sont proportionnelles à une de ses lignes; or il doit exister au moins une ligne dont les éléments ne sont pas tous nuls (comme $f''(\lambda_1) \neq 0$, au moins un des nombres $a_{11} - \lambda$, $a_{22} - \lambda$, $a_{33} - \lambda$ ($\lambda = \lambda_1$) doit être non nul). En remarquant que les lignes du déterminant (30) sont composées des coefficients du système (14), nous en déduisons que pour $\lambda = \lambda_1$ le système (14) comporte une seule équation essentielle, toutes les autres lui étant proportionnelles et donc en découlent. Or, c'est ce qu'on a affirmé au n° 41.

2) Soit $\lambda = \lambda_1$ une racine triple de l'équation caractéristique. Alors

$$f(\lambda_1) = 0, \quad f'(\lambda_1) = 0, \quad f''(\lambda_1) = 0.$$

Ainsi donc, pour $\lambda = \lambda_1$ le déterminant (30) vérifie les conditions du lemme 2 du présent n°. En appliquant le lemme nous trouvons que $a_{11} - \lambda_1 = 0$, $a_{22} - \lambda_1 = 0$, $a_{33} - \lambda_1 = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$. Par conséquent, pour $\lambda = \lambda_1$ tous les coefficients du système (14) s'annulent de sorte que celui-ci se ramène à des identités. Ceci démontre la proposition du n° 42.

§ 9. Invariants et classification des formes quadratiques de trois arguments

45. Au paragraphe précédent nous avons indiqué une méthode de réduction d'une forme quadratique donnée de trois arguments à sa forme canonique. Il est légitime de se demander s'il existe

un autre changement des coordonnées rectangulaires qui ramènerait la forme quadratique à une autre expression canonique. Montrons que *chaque forme quadratique de trois arguments se réduit à une seule forme canonique* (à la permutation des variables près). Il est à noter que l'unicité de la forme canonique d'une forme quadratique donnée n'est assurée que si les coordonnées sont rectangulaires et l'échelle reste inchangée.

46. Démontrons notre proposition. Notons par Φ la valeur de la forme quadratique donnée :

$$\Phi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz. \qquad (1)$$

Conformément à l'égalité (1), à chaque point $M(x; y; z)$ est associé un nombre Φ, dit valeur de la forme au point M.

Réduisons la forme quadratique donnée à son expression canonique en suivant les indications du § 8. La valeur Φ au point M sera donnée par l'égalité

$$\Phi = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2, \qquad (2)$$

où x', y', z' sont les nouvelles coordonnées du point M, λ_1, λ_2, λ_3, les nombres caractéristiques de la forme Φ.

Supposons que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$; dans ce cas il découle de (2) que

$$\lambda_1 (x'^2 + y'^2 + z'^2) \leqslant \Phi \leqslant \lambda_3 (x'^2 + y'^2 + z'^2). \qquad (3)$$

Comme $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$, les mêmes relations ont lieu en anciennes coordonnées

$$\lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2) \leqslant \Phi \leqslant \lambda_3 (x^2 + y^2 + z^2). \qquad (4)$$

Astreignons le point M à se déplacer sur la sphère unité :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Sous cette condition, toutes les valeurs de Φ (correspondant à toutes les positions du point M sur la sphère unité) sont comprises entre λ_1 et λ_3, c'est-à-dire que

$$\lambda_1 \leqslant \Phi \leqslant \lambda_3. \qquad (5)$$

Les limites indiquées sont exactes. En particulier, si $x' = \pm 1$, $y' = 0$, $z' = 0$, on a $\Phi = \lambda_1$; si $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \pm 1$, on a $\Phi = \lambda_3$. Ces raisonnements permettent de conclure que si la forme quadratique donnée est ramenée par un autre moyen (en d'autres coordonnées) à la forme canonique, le plus petit et le plus grand coefficients de cette expression canonique seront de nouveau les nombres λ_1 et λ_3 (dans le cas contraire la forme donnée aurait sur la sphère unité d'autres limites de variation, or, ceci est impossible). Montrons que la forme donnée ne peut pas être

réduite à des expressions canoniques qui différeraient par le coefficient du milieu. Supposons que dans certains axes la forme considérée ait pris la forme canonique suivante:

$$\Phi = \lambda_1 x'^2 + \mu y'^2 + \lambda_3 z'^2,$$

où $\lambda_1 < \mu < \lambda_3$. On aura alors sur la sphère unité, partout où $x' \neq 0$ ou $y' \neq 0$, la relation

$$\Phi = \lambda_1 x'^2 + \mu y'^2 + \lambda_3 z'^2 < \lambda_3 (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \lambda_3,$$

donc

$$\Phi < \lambda_3.$$

Il n'y a que deux points de la sphère unité: ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = +1$) et ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = -1$) où l'on a

$$\Phi = \lambda_3.$$

Ainsi donc, sur la sphère unité il existe un seul couple de points diamétralement opposés où Φ atteigne sa valeur maximale. Or, c'est précisément par ces points que passe l'axe de cotes du système de coordonnées dans lequel la forme donnée se met sous sa forme canonique.

On démontre de façon analogue qu'il existe sur la sphère unité un couple unique de points diamétralement opposés où Φ prend sa valeur minimale: $\Phi = \lambda_1$. Par ces points passe l'axe d'abscisses du système de coordonnées dans lequel la forme donnée a sa forme canonique. On voit que la position des deux axes de coordonnées de ce système est définie de façon univoque; par conséquent, tout le système est défini de façon univoque (au sens des axes près). Comme dans le cas où $\lambda_1 < \mu < \lambda_3$ il n'existe aucun autre système de coordonnées où la forme $\lambda_1 x'^2 + \mu y'^2 + \lambda_3 z'^2$ se réduise à sa forme canonique, il ne peut exister d'autre forme canonique. En particulier, on a $\mu = \lambda_2$.

Reste à examiner les cas $\lambda_1 = \mu < \lambda_3$ et $\lambda_1 < \mu = \lambda_3$. Si $\lambda_1 = \mu < \lambda_3$, le maximum $\Phi = \lambda_3$ sur la sphère unité a lieu, comme auparavant, en un couple unique de points $(0, 0, \pm 1)$ et le minimum $\Phi = \lambda_1$ en tous les points où $z' = 0$ (c'est-à-dire le long de l'équateur). Dans ce cas n'est définie que la position de l'axe de cotes. Si l'on tourne le système d'axes autour de l'axe de cotes fixe, on a $\mu = \lambda_1$. Comme μ ne peut pas varier, on a dans ce cas aussi $\mu = \lambda_2$. L'hypothèse $\lambda_1 < \mu = \lambda_3$ s'examine de façon analogue. Ainsi, une forme quadratique donnée se ramène à une forme canonique unique: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$ (à la permutation des axes près).

47. Soit une forme quadratique quelconque

$$\Phi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

et soit le changement de coordonnées

$$\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' \end{aligned}$$

la rotation des axes étant arbitraire.

En portant les expressions de x, y, z dans Φ, on a dans les nouvelles coordonnées (rectangulaires):

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = \\ = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z'. \end{aligned} \quad (6)$$

Comme les formes quadratiques écrites au premier et au second membre se transforment l'une dans l'autre, elles se réduisent à une même expression canonique. Par conséquent, ces deux formes possèdent les mêmes nombres caractéristiques λ_1, λ_2, λ_3. Ecrivons l'équation caractéristique de la forme donnée:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le déterminant on trouve

$$\lambda^3 - \sigma\lambda^2 + \varkappa\lambda - \delta = 0, \quad (7)$$

où

$$\sigma = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad (8)$$

$$\varkappa = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (9)$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Ecrivons aussi l'équation caractéristique de la forme qui se trouve au second membre de (6):

$$\lambda^3 - \sigma'\lambda^2 + \varkappa'\lambda - \delta' = 0. \quad (11)$$

Ici σ', $\varkappa'$, δ' sont des grandeurs qui s'expriment par les égalités (8), (9), (10) si on y remplace les a_{11}, . . ., a_{33} par a'_{11}, . . ., a'_{33}. Les

équations (7) et (11) admettent les mêmes racines λ_1, λ_2, λ_3 et, donc, sont identiques. Ainsi,

$$\sigma' = \sigma, \quad \varkappa' = \varkappa, \quad \delta' = \delta.$$

On voit que les grandeurs σ, $\varkappa$, δ se conservent dans tout changement des coordonnées rectangulaires (l'échelle ne changeant pas). Elles sont appelées *invariants* de la forme par changement des coordonnées rectangulaires. L'invariant

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

qui est appelé discriminant de la forme quadratique donnée joue un rôle très important. Selon (27) du n° 44 on a

$$\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{13}$$

48. Convenons d'appeler une forme quadratique de trois arguments *elliptique* si ses nombres caractéristiques λ_1, λ_2, λ_3 sont tous non nuls et sont de même signe ; la forme sera *hyperbolique* si λ_1, λ_2, λ_3 sont tous non nuls mais ne sont pas tous de même signe ; la forme est *parabolique* quand l'un au moins des nombres λ_1, λ_2, λ_3 est nul.

Conformément à (13), *les formes paraboliques se caractérisent par la condition* $\delta = 0$.

Soit une forme elliptique Φ ; admettons que ses nombres caractéristiques soient positifs : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$. Alors, selon les inégalités (3) du n° 46, en tout point $M(x, y, z)$, sauf à l'origine des coordonnées, $\Phi > 0$. Une telle forme est dite *définie positive*. Si le point $M(x, y, z)$ parcourt la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$, une forme définie positive varie dans des limites positives $0 < \lambda_1 \leqslant \Phi \leqslant \lambda_3$. Supposons que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ ($\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$). Alors, d'après les inégalités (3), en tout point (sauf à l'origine des coordonnées) on a $\Phi < 0$. Une telle forme est dite *définie négative*. Sur la sphère unité une forme définie négative varie dans les limites négatives $\lambda_1 \leqslant \Phi \leqslant \lambda_3 < 0$. Ainsi donc, *chaque forme elliptique est soit définie positive, soit définie négative.*

Examinons maintenant la forme hyperbolique : si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$, alors $\lambda_1 < 0$, $\lambda_3 > 0$. Sur la sphère unité la forme Φ varie entre les limites λ_1, λ_3, dont l'une est négative et l'autre positive. Il en découle, en particulier, qu'*une forme hyperbolique est alternée.*

49. Si $\delta \neq 0$, la forme est soit elliptique, soit hyperbolique. Pour établir auquel des deux types se rapporte la forme donnée,

il convient de déterminer les signes de ses nombres caractéristiques, c'est-à-dire les signes des racines de l'équation caractéristique. Etant donné que les racines de l'équation caractéristique sont toutes réelles, on peut lui appliquer le théorème d'algèbre, connu sous le nom de théorème de Descartes *) : *si toutes les racines d'une équation sont réelles et le terme constant diffère de zéro, le nombre de racines positives de cette équation est égal au nombre de changements de signe dans le système de ses coefficients* (une racine multiple est comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité). Le nombre total des racines de l'équation caractéristique étant connu (égal à trois), en appliquant à cette équation le théorème de Descartes on trouve combien la forme donnée admet de nombres caractéristiques positifs et négatifs et partant on la définit entièrement.

Exemple. Déterminer le type de la forme quadratique

$$\Phi = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz.$$

Solution. Formons l'équation caractéristique : $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$. Ecrivons les signes des coefficients de cette équation : $+-+-$. Un changement de signe a lieu lorsqu'on passe du premier coefficient au second, puis du second au troisième et, enfin, du troisième au quatrième. Le nombre total de changements de signe est égal à trois. Par conséquent, les trois nombres caractéristiques sont positifs et la forme est elliptique et définie positive.

Remarquons que dans ce cas on trouve facilement les racines : $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Connaissant les racines, on peut établir les limites de variation de la forme donnée sur la sphère unité : si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, on a

$$3 \leqslant 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz \leqslant 9.$$

Exemple. Déterminer le type de la forme quadratique

$$\Phi = x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz.$$

Solution. Formons l'équation caractéristique : $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$. On relève un seul changement de signe (lorsqu'on passe du premier coefficient au second). Donc, un nombre caractéristique est positif, les deux autres négatifs. La forme donnée est donc hyperbolique.

---

*) On trouvera la démonstration du théorème de Descartes dans le livre de A. Kurosh *Cours d'algèbre supérieure*, éd. Mir, Moscou, 1973, pp. 263-264.

§ 10. Réduction de l'équation générale d'une quadrique à sa forme canonique

50. Soit l'équation générale d'une quadrique:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+ \\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \quad (1)$$

Le premier membre de l'équation (1) est constitué de trois groupes de termes:

1) de la forme quadratique composée des termes de plus haut degré:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz;$$

2) de la forme linéaire composée des termes du premier degré:

$$2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z;$$

3) et du terme constant a_{44}.

Notre but est de ramener l'équation (1) à sa forme canonique par passage à de nouveaux axes rectangulaires et d'établir le type de la quadrique donnée. Réduire l'équation (1) à sa forme canonique c'est 1) ramener à sa forme canonique la forme quadratique des termes de plus haut degré; 2) minimiser le nombre des termes du premier degré (les éliminer si possible); 3) enfin, éliminer le terme constant si possible.

Ce problème se résout, en règle générale, comme celui des coniques (voir § 4).

Supposons que l'on effectue une rotation du système d'axes d'un certain angle: les coordonnées changent alors selon les formules

$$\left.\begin{aligned} x&=l_1x'+l_2y'+l_3z',\\ y&=m_1x'+m_2y'+m_3z',\\ z&=n_1x'+n_2y'+n_3z'. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Si l'on porte les expressions de x, y, z dans l'équation (1) chacun des groupes indiqués ci-dessus se transforme de façon autonome (sans influer sur les autres groupes). Dirigeons les nouveaux axes de coordonnées suivant les directions principales de la forme quadratique des termes de plus haut degré (appelées aussi directions principales de la quadrique donnée). Alors:

1) la forme quadratique des termes de plus haut degré prendra la forme canonique:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz= \\ =\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2;$$

2) le groupe des termes du premier degré se transformera en un groupe analogue de termes mais avec d'autres coefficients:

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z = 2\mu x' + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' ;$$

3) le terme constant ne changera pas.

Dans les nouveaux axes l'équation de la quadrique donnée s'écrit

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 y + 2\mu_3 z + a_{44} = 0. \qquad (3)$$

Les simplifications ultérieures de l'équation obtenue sont suggérées par le type de la forme quadratique des termes de plus haut degré.

51. Supposons que le discriminant de la forme des termes de plus haut degré soit non nul: $\delta \neq 0$. Comme $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, alors $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ et l'équation (3) se met sous la forme:

$$\lambda_1\left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z' + \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right)^2 = \\ = -a_{44} + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3}. \qquad (4)$$

Effectuons le changement de coordonnées suivant:

$$x' = x'' - \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \quad y' = y'' - \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \quad z' = z'' - \frac{\mu_3}{\lambda_3}.$$

Désignons le second membre de (4) par la lettre H; l'équation de la quadrique donnée prendra, dans ces derniers axes, la forme canonique:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = H. \qquad (5)$$

Lorsque $H \neq 0$, l'équation (5) se récrit comme suit:

$$\frac{x''^2}{\frac{H}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{H}{\lambda_2}} + \frac{z''^2}{\frac{H}{\lambda_3}} = 1. \qquad (6)$$

Deux cas peuvent se présenter.

1) La forme quadratique des termes de plus haut degré de l'équation donnée est *elliptique*; alors les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont de même signe. Posons $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$.

Si, de plus, $H > 0$, l'équation (5) se réduit à la forme (6) et définit un *ellipsoïde* *) de demi-axes

$$a = \sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}, \quad c = \sqrt{\frac{H}{\lambda_3}}.$$

*) Pour la classification des quadriques voir notre « Cours », §§ 72 à 75.

Si $H = 0$, l'équation (5) définit un point réel unique : $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z'' = 0$. On dit aussi que dans ce cas l'équation (5) définit un *cône imaginaire*. Un cône imaginaire peut être considéré comme un *ellipsoïde dégénéré* (en supposant que l'équation (5) pour $H = 0$ est le cas limite lorsque $H \to 0$).

Si $H < 0$, l'équation (5) ne définit aucune image réelle. On dit alors que l'équation (5) est celle d'un *ellipsoïde imaginaire*.

2) La forme quadratique des termes de plus haut degré de l'équation donnée est *hyperbolique* ; alors deux des nombres λ_1, λ_2, λ_3 seront de même signe et un de signe contraire. Posons $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$.

Si avec cela $H > 0$, l'équation (5) se ramène à la forme (6) et donc, admet l'écriture suivante :

$$\frac{x''^2}{\frac{H}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{H}{\lambda_2}} - \frac{z''^2}{\left|\frac{H}{\lambda_3}\right|} = 1.$$

Cette équation définit un *hyperboloïde à une nappe*.

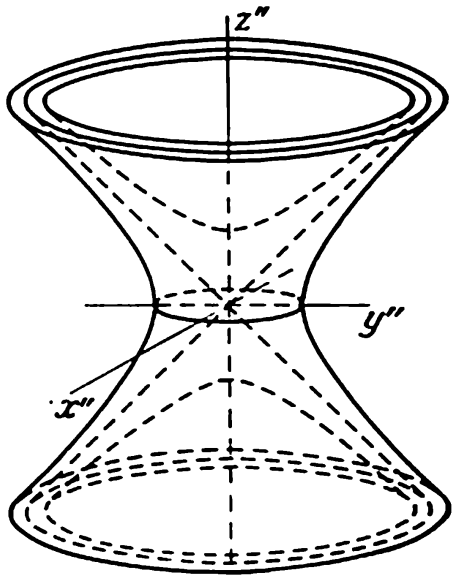

Fig. 6.

Si $H < 0$, en divisant les termes de l'équation (5) par le nombre positif $-H$, on réduit celle-ci à la forme :

$$\frac{x''^2}{\left|\frac{H}{\lambda_1}\right|} + \frac{y''^2}{\left|\frac{H}{\lambda_2}\right|} - \frac{z''^2}{\left|\frac{H}{\lambda_3}\right|} = -1.$$

L'équation obtenue définit un *hyperboloïde à deux nappes*.

Enfin, si $H = 0$, en écrivant l'équation (5) sous la forme

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 - |\lambda_3| z''^2 = 0, \qquad (7)$$

on constate qu'elle définit un *cône réel*.

Remarquons que l'équation (5) pour $H = 0$ s'obtient à partir de l'équation du même type que pour $H \neq 0$ par passage à la limite lorsque $H \to 0$. Ainsi donc, *on peut considérer un cône réel du second degré comme le résultat de la dégénérescence d'un hyperboloïde à une ou à deux nappes* (suivant la manière dont H tend vers zéro, c'est-à-dire par valeurs positives ou négatives). La figure 6 représente un cône et deux hyperboloïdes (à une nappe et à deux nappes) qui l'approchent. Ces trois quadriques correspondent aux cas $H = 0$, $H > 0$, $H < 0$; lorsque H tend vers zéro, les deux hyperboloïdes s'approchent du cône qui est leur limite.

52. Supposons maintenant que le discriminant de la forme quadratique des termes de plus haut degré de l'équation (1) $\delta = 0$. Comme $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, l'un au moins des nombres λ_1, λ_2, λ_3 est nul (ce qui signifie que la forme quadratique est *parabolique*). Nous allons considérer que $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ (les nombres λ_1, λ_2, λ_3 ne peuvent pas être simultanément nuls car si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ la forme elle-même serait identiquement nulle). Deux cas sont possibles.

1) $\lambda_2 \neq 0$; l'équation (3) donne alors

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + a_{44} = 0, \tag{8}$$

soit

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2\mu_3 z' + H = 0, \tag{9}$$

où $H = a_{44} - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} - \frac{\mu_2^2}{\lambda_2}$.

Si $\mu_3 \neq 0$, en faisant le changement de coordonnées

$$x' = x'' - \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \quad y' = y'' - \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \quad z' = z'' - \frac{H}{2\mu_3},$$

on déduit de (9) l'équation canonique de la quadrique donnée

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2\mu_3 z'' = 0.$$

Cette dernière équation se met sous la forme:

$$2z'' = \frac{x''^2}{-\frac{\mu_3}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{-\frac{\mu_3}{\lambda_2}}. \tag{10}$$

On voit que pour $\mu_3 \neq 0$ l'équation (8) définit un *paraboloïde* (elliptique ou hyperbolique selon les signes des dénominateurs au second membre de (10)). Si $\mu_3 = 0$, l'équation (8) se ramène à la forme

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + H = 0$$

et, donc, définit un *cylindre elliptique* ou *hyperbolique*.

2) $\lambda_2 = 0$; l'équation (8) se réduit alors à l'équation

$$\lambda_1 x'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + a_{44} = 0, \tag{11}$$

soit

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + H = 0, \tag{12}$$

où $H = a_{44} - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1}$.

Si $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$, il nous faudra tourner le système d'axes Ox', Oy', Oz' autour de l'axe Ox' d'un angle α tel que $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\mu_2}{\mu_3}$ et qui serait compté à partir de l'axe Oy' dans la direction de l'axe Oz', puis effectuer une $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$-translation des axes parallèlement à l'axe Ox'. Les coordonnées se transforment alors selon les formules:

$$x'' = x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1},$$

$$y'' = \frac{\mu_2}{\mu} y' + \frac{\mu_3}{\mu} z',$$

$$z'' = -\frac{\mu_2}{\mu} y' + \frac{\mu_3}{\mu} z',$$

où $\mu = \sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}$. L'équation (12) acquiert la forme

$$\lambda_1 x''^2 + 2\mu y'' + H = 0. \tag{13}$$

En effectuant encore une $\frac{H}{2\mu}$-translation des axes obtenus parallèlement à l'axe d'ordonnées $\left(\text{ce qui correspond au changement de coordonnées } x'' = x''',\ y'' = y''' - \frac{H}{2\mu}\right)$, on aboutit à l'équation canonique de la surface donnée:

$$\lambda_1 x'''^2 + 2\mu y''' = 0.$$

On voit que sous les hypothèses faites ($\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$) l'équation (12) définit un *cylindre parabolique.*

Si dans l'équation (12) on pose $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 = 0$, celle-ci se ramène à la forme (13) par la seule $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$-translation du système d'axes Ox', Oy', Oz' parallèlement à l'axe Ox' et donc, définit aussi un cylindre parabolique. Le cas $\mu_2 = 0$, $\mu_3 \neq 0$ se ramène au précédent à condition de permuter y' et z'.

Enfin, si $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$, l'équation (12) se réduit de façon évidente à la forme canonique:

$$\lambda_1 x''^2 + H = 0. \tag{14}$$

L'équation (14) définit un *couple de plans parallèles* (réels pour $\lambda_1 > 0$, $H \leqslant 0$, imaginaires pour $\lambda_1 > 0$, $H > 0$).

R e m a r q u e. Il a été établi plus haut que l'équation (8) pour $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$ définit un paraboloïde. Si $\mu_3 \to 0$ ou $\lambda_2 \to 0$, l'équation (8) devient à la limite l'équation d'un cylindre. Pour cette raison on peut considérer que *les cylindres du second ordre sont des paraboloïdes dégénérés.*

53. Résumons-nous :

Si le groupe des termes de plus haut degré de l'équation (1) *est elliptique, celle-ci définit un ellipsoïde* (ordinaire, imaginaire ou dégénéré) ; *si ce groupe est hyperbolique, l'équation définit un hyperboloïde* (à une nappe, à deux nappes ou dégénéré) ; *si enfin ce groupe est parabolique* ($\delta = 0$), *l'équation définit un paraboloïde* (elliptique, hyperbolique ou dégénéré).

§ 11. Equations du centre. Indice de dégénérescence d'une quadrique. Exemples

54. S'il s'agit de réduire à sa forme canonique l'équation générale d'une quadrique à centre, il est rationnel de placer tout d'abord l'origine des coordonnées au centre de cette quadrique puis de tourner convenablement les axes. La marche à suivre étant définie, déduisons les équations qui nous permettront de trouver s'il existe le centre d'une quadrique directement à partir de son équation générale.

55. On appelle *centre* d'une quadrique un point S tel que, l'origine des coordonnées étant placée au point S, l'équation de la surface ne contienne plus de termes du premier degré (voir n° 34).

Soit l'équation d'une quadrique

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (1)$$

On demande de trouver son centre (ou de s'assurer qu'elle n'en a pas). Supposons que le centre existe et, notons-le, comme auparavant, par la lettre S ; soient x_0, y_0, z_0 ses coordonnées (dans le système de coordonnées donné). Transférons l'origine des coordonnées au centre S ; les coordonnées d'un point arbitraire se transforment alors d'après les formules :

$$x = \tilde{x} + x_0, \quad y = \tilde{y} + y_0, \quad z = \tilde{z} + z_0. \quad (2)$$

Passons dans l'équation (1) aux nouvelles coordonnées. Afin de simplifier l'écriture des relations qui suivent, désignons le premier membre de l'équation (1) par $F(x, y, z)$. En portant les expressions (2) de x, y, z dans l'équation (1) on obtient

$$F(x, y, z) = F(\tilde{x} + x_0, \tilde{y} + y_0, \tilde{z} + z_0) = \\ = a_{11}\tilde{x}^2 + a_{22}\tilde{y}^2 + a_{33}\tilde{z}^2 + 2a_{12}\tilde{x}\tilde{y} + 2a_{13}\tilde{x}\tilde{z} + \\ + 2a_{23}\tilde{y}\tilde{z} + 2A_{14}\tilde{x} + 2A_{24}\tilde{y} + 2A_{34}\tilde{z} + A_{44}, \quad (3)$$

où

$$\left.\begin{aligned} A_{14} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}, \\ A_{24} &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}, \\ A_{34} &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}, \\ A_{44} &= F(x_0, y_0, z_0); \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

les coefficients des termes du second degré restent inchangés.

Le premier membre de (1) se transforme dans tous les cas d'après les formules indiquées, c'est-à-dire indépendamment de ce que représente le point S. Le point S sera centre si $A_{14} = 0$, $A_{24} = 0$, $A_{34} = 0$. Ceci nous conduit aux équations du centre:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

En résolvant ces équations simultanément, on trouve le centre $S(x_0, y_0, z_0)$. Le système (5) peut fort bien être incompatible, et alors la quadrique donnée n'a pas de centre. Ecrivons le déterminant du système (5):

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

nous voyons qu'il coïncide avec le discriminant déjà connu du groupe des termes de plus haut degré.

Si $\delta \neq 0$, le système (5) est compatible et admet une solution unique. Par conséquent, pour $\delta \neq 0$ la quadrique considérée possède un centre unique. Une telle quadrique est dite *centrale* ou *à centre*. Dans le cas d'une quadrique centrale les coordonnées du centre s'expriment par les formules:

$$x_0 = \frac{\delta_x}{\delta}, \quad y_0 = \frac{\delta_y}{\delta}, \quad z_0 = \frac{\delta_z}{\delta}, \tag{6}$$

où δ_x est un déterminant du troisième ordre qui se déduit du déterminant δ en remplaçant les éléments de la première colonne de ce dernier par les nombres $-a_{14}$, $-a_{24}$, $-a_{34}$; les déterminants δ_y et δ_z s'obtiennent à partir de δ moyennant une substitution analogue des éléments de la deuxième et de la troisième colonnes respectivement (voir le « Cours », Appendice, § 5).

Les formules (4) et (6) fournissent A_{44}. On a

$$\begin{aligned} A_{44} = F(x_0, y_0, z_0) = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})\,x_0 + \\ + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})\,y_0 + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})\,z_0 + \\ + (a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44}). \end{aligned}$$

D'où et compte tenu du système (5) on trouve

$$A_{44} = a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44}. \tag{7}$$

En utilisant (6) on obtient

$$A_{44} = \frac{a_{41}\delta_x + a_{42}\delta_y + a_{43}\delta_z + a_{44}\delta}{\delta}.$$

Le numérateur de cette fraction peut être écrit sous forme d'un déterminant du quatrième ordre

$$a_{41}\delta_x + a_{42}\delta_y + a_{43}\delta_z + a_{44}\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Le moyen le plus simple de vérifier l'égalité (8) est de développer le déterminant du second membre suivant les éléments de la dernière ligne et de s'assurer que les cofacteurs de cette ligne sont égaux à δ_x, δ_y, δ_z, δ (voir le « Cours », Appendice, § 6).

Le déterminant (8) s'appelle discriminant du premier membre de l'équation (1) et se note par le symbole Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

A partir de l'égalité (8) on trouve finalement

$$A_{44} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Donc, si la quadrique donnée par l'équation (1) est à centre ($\delta \neq 0$), alors le transfert de l'origine des coordonnées en ce centre ramène l'équation (1) à la forme

$$a_{11}\tilde{x}^2 + a_{22}\tilde{y}^2 + a_{33}\tilde{z}^2 + 2a_{12}\tilde{x}\tilde{y} + 2a_{13}\tilde{x}\tilde{z} + 2a_{23}\tilde{y}\tilde{z} + \frac{\Delta}{\delta} = 0\,; \tag{9}$$

les coefficients des termes de plus haut degré sont invariants. En effectuant maintenant une rotation d'axes appropriée, on peut réduire l'équation (9) à la forme canonique

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{10}$$

56. En comparant cette dernière équation avec l'équation (5) du § 10 on remarque que le terme constant H dans cette dernière

peut être calculé immédiatement à partir de l'équation (1) sans recourir à aucun changement de coordonnées; notamment, $H = -\frac{\Delta}{\delta}$.

Nous avons établi au § 10 que pour $H = 0$ l'équation (5) définit une quadrique dégénérée (un cône). Nous en déduisons qu'une quadrique centrale est dégénérée si et seulement si $\Delta = 0$.

Signalons (sans le démontrer) que l'égalité $\Delta = 0$ caractérise également des paraboloïdes dégénérés (c'est-à-dire des cylindres). Ainsi donc, on a l'assertion générale suivante: *l'équation* (1) *définit une quadrique dégénérée* (un cône ou un cylindre) *si et seulement si* $\Delta = 0$.

La conséquence qu'on en tire est que les cylindres, en tant que paraboloïdes dégénérés, se caractérisent par deux conditions: $\delta = 0$, $\Delta = 0$.

57. Exemple. Réduire à sa forme canonique l'équation

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 18 = 0.$$

Solution. Calculons tout d'abord δ:

$$\delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162.$$

Comme $\delta \neq 0$, l'équation donnée définit une quadrique centrale. Les coordonnées du centre peuvent être trouvées à partir des équations (5), lesquelles dans le cas considéré s'écrivent

$$\begin{aligned} 7x_0 - 2y_0 \qquad\qquad - 3 &= 0, \\ -2x_0 + 6y_0 - 2z_0 - 12 &= 0, \\ -2y_0 + 5z_0 + 9 &= 0. \end{aligned}$$

En résolvant ce système on trouve $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -1$. Plaçons l'origine des coordonnées au point $S(1; 2; -1)$; les coordonnées se transforment alors selon les formules

$$x = \tilde{x} + 1, \quad y = \tilde{y} + 2, \quad z = \tilde{z} - 1$$

et l'équation donnée prend la forme

$$7\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 + 5\tilde{z}^2 - 4\tilde{x}\tilde{y} - 4\tilde{y}\tilde{z} - 18 = 0. \qquad (*)$$

Nous avons calculé le terme constant de l'équation (*) d'après la formule (7): $A_{44} = -3x_0 - 12y_0 + 9z_0 + 18 = -18$. On

peut procéder autrement: notamment, connaissant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 5 & 9 \\ -3 & -12 & 9 & 18 \end{vmatrix} = -2916,$$

on trouve $A_{44} = \frac{\Delta}{8} = -18$. En transformant ensuite l'équation (*) conformément au n° 43, on obtient l'équation canonique de la quadrique donnée: $3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 18 = 0$.

Exemple. Réduire à la forme canonique l'équation

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0. \tag{11}$$

Solution. Calculons le discriminant des termes du second degré:

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme $\delta = 0$, la quadrique donnée n'est pas centrale et, donc, nous devons commencer par simplifier le groupe des termes du second degré (voir n^{os} 50 et 52).

Formons l'équation caractéristique:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 10\lambda = 0.$$

Les racines de cette équation sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 0$. Ecrivons pour le problème considéré le système d'équations (14) du 8:

$$\left.\begin{aligned} (2-\lambda)\,l + 2m + n &= 0, \\ 2l + (2-\lambda)\,m + n &= 0, \\ l + m + (3-\lambda)\,n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

En posant dans les équations (3) $\lambda = \lambda_1 = 2$, on trouve

$$\begin{aligned} 2m + n &= 0, \\ 2l \quad + n &= 0, \\ l + m + n &= 0. \end{aligned}$$

Une des solutions non nulles de ce système est, par exemple, $l = 1$, $m = 1$, $n = -2$; il lui correspond le vecteur $a_1 = \{1; 1; -2\}$ déterminant la première direction principale.

En posant dans les équations (3) $\lambda = \lambda_2 = 5$, on trouve

$$\begin{aligned} -3l + 2m + n &= 0, \\ 2l - 3m + n &= 0, \\ l + m - 2n &= 0. \end{aligned}$$

En tant que solution non nulle de ce système on peut prendre, par exemple, $l = 1$, $m = 1$, $n = 1$ qui détermine le vecteur de la deuxième direction principale $a_2 = \{1; 1; 1\}$. En posant enfin dans les équations (3) $\lambda = \lambda_3 = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 2l + 2m + n &= 0, \\ 2l + 2m + n &= 0, \\ l + m + 3n &= 0. \end{aligned}$$

Une solution non nulle de ce système est, par exemple, $l = 1$, $m = -1$, $n = 0$; elle détermine le vecteur $a_3 = \{1; -1; 0\}$ dirigé le long de la troisième direction principale.

Dirigeons les nouveaux axes le long des vecteurs a_1, a_2, a_3. Pour établir les formules de changement de coordonnées, il nous faudra trouver les vecteurs de base des nouveaux axes:

$$i' = \frac{a_1}{|a_1|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right\},$$

$$j' = \frac{a_2}{|a_2|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},$$

$$k' = \frac{a_3}{|a_3|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\}.$$

En utilisant les relations obtenues nous trouvons conformément au n° 26 les formules cherchées:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z', \\ y &= \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z', \\ z &= -\frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y'. \end{aligned}$$

Connaissant les racines de l'équation caractéristique, le groupe des termes du second degré de l'équation (2) s'écrit immédiatement dans les nouveaux axes; notamment, on trouve $2x'^2 + 5y'^2$.

Pour exprimer les autres termes de l'équation (2) dans les nouvelles coordonnées, on se servira des formules ci-dessus ; il vient

$$-4x + 6y - 2z + 3 = \sqrt{6}x' - 5\sqrt{2}\,z' + 3.$$

Ainsi donc, l'équation de la quadrique, dans les nouvelles coordonnées, prend la forme

$$2x'^2 + 5y'^2 + \sqrt{6}x' - 5\sqrt{2}z' + 3 = 0,$$

ou encore

$$2\left(x'^2 + \frac{\sqrt{6}}{2}x'\right) + 5y'^2 - 5\sqrt{2}z' + 3 = 0.$$

En complétant l'expression entre parenthèses à un carré parfait, on trouve

$$2\left(x' + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + 5y'^2 - 5\sqrt{2}\left(z' - \frac{9\sqrt{2}}{40}\right) = 0.$$

Effectuons maintenant la translation définie par

$$x' = x'' - \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$y' = y'',$$

$$z' = z'' + \frac{9\sqrt{2}}{40}.$$

Et l'équation canonique de la quadrique donnée s'écrit :

$$2x''^2 + 5y''^2 - 5\sqrt{2}\,z'' = 0,$$

ou

$$5\sqrt{2}z'' = 2x''^2 + 5y''^2.$$

La quadrique considérée est donc un *paraboloïde elliptique.*

CHAPITRE III

TRANSFORMATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

§ 12. Transformations linéaires dans le plan

58. Soit un plan (α) et un point arbitraire O sur ce plan. Alors tout point M du plan (α) détermine un rayon vecteur $x = \overrightarrow{OM}$. Si un vecteur arbitraire x nous est donné dans le plan (α) nous supposerons qu'il a le point O pour origine. Ainsi, chaque vecteur sera considéré comme rayon vecteur d'un point.

59. Soit donnée une loi qui à tout point M du plan (α) associe un point M' de ce plan (autrement dit, le point M est déplacé en un point M'). On dit que dans ce cas sur le plan (α) est donnée une *transformation ponctuelle*; on appelle le point M' *image* du point M.

Dans la suite nous supposerons toujours que le point O est invariant (coïncide avec son image) par la transformation donnée.

60. Outre la transformation ponctuelle, nous allons considérer la *transformation des vecteurs* du plan (α) qui à un vecteur arbitraire $x = \overrightarrow{OM}$ associe un vecteur $x' = \overrightarrow{OM'}$. Le vecteur x' est appelé *image* du vecteur x. Ce qu'on note: $x' = Ax$. Cette notation désigne en même temps la transformation donnée (si l'on a à envisager d'autres transformations, on écrira $x' = Bx$, $x' = Cx$, etc.).

61. *Une transformation $x' = Ax$ est dite linéaire si sont observées les deux conditions suivantes*:

1) $A(\lambda x) = \lambda Ax$, où x *est un vecteur arbitraire du plan* (α), λ *un nombre arbitraire*;

2) $A(x + y) = Ax + Ay$, où x et y *sont deux vecteurs quelconques du plan* (α).

Donnons une interprétation géométrique de ces conditions. Convenons seulement de ne pas mentionner à chaque fois qu'il s'agit des points et vecteurs du plan (α).

Commençons par la première condition. On sait que le vecteur λx est colinéaire au vecteur x et s'obtient par une multiplication de ce dernier par λ; la première condition signifie que l'image du vecteur λx est colinéaire elle aussi à celle de x et s'en obtient

par une multiplication par λ (voir fig. 7 où $x = \overrightarrow{OM}$, $\lambda x = \overrightarrow{ON}$, $Ax = \overrightarrow{OM'}$, $A(\lambda x) = \overrightarrow{ON'}$; comme $A(\lambda x) = \lambda Ax$, alors $\overrightarrow{ON'}$ s'obtient à partir de $\overrightarrow{OM'}$ par une même multiplication qui nous donne $\overrightarrow{ON}$ à partir de $\overrightarrow{OM}$).

Pour interpréter la seconde condition posons $x = \overrightarrow{OM}$, $y = \overrightarrow{ON}$, $x + y = \overrightarrow{OP}$ (fig. 8). Soient M', N', P' les images des

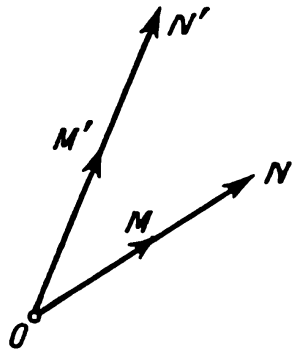

Fig. 7.

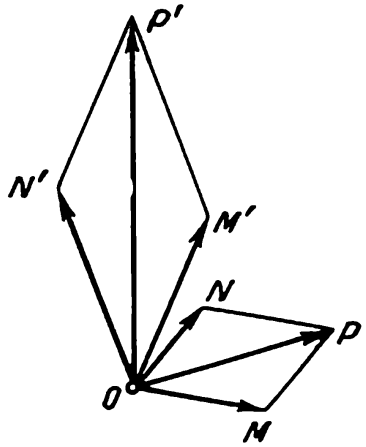

Fig. 8.

points M, N, P par la transformation envisagée. Alors $Ax = \overrightarrow{OM'}$, $Ay = \overrightarrow{ON'}$, $A(x + y) = \overrightarrow{OP'}$ et, conformément à la seconde condition, $\overrightarrow{OP'} = A(x + y) = Ax + Ay = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'}$. Par conséquent, la seconde condition signifie que chaque parallélogramme $OMNP$ se transforme en un quadrilatère $OM'N'P'$ qui est également un parallélogramme.

Exemple 1. On considère une transformation qui multiplie par k tous les vecteurs (k est donné) : $Ax = kx$. Les deux conditions sont observées. En effet, $A(\lambda x) = k(\lambda x) = \lambda(kx) = \lambda Ax$; en outre, $A(x + y) = k(x + y) = kx + ky = Ax + Ay$. Par conséquent, la transformation donnée est linéaire. Une telle transformation est dite *homothétie* et le nombre k s'appelle *rapport d'homothétie*.

Si $x = \overrightarrow{OM}$, $Ax = \overrightarrow{OM'}$ et si le point M parcourt une figure F, alors le point M' parcourt une figure F' homothétique à F ; le point O est le centre d'homothétie (fig. 9).

Exemple 2. On considère une transformation par laquelle les vecteurs subissent une rotation autour du point O d'un même angle et dans le même sens : $x' = Ax$, où x' se déduit du vecteur x par une rotation d'un angle donné α. Il est géométriquement évident que les deux conditions de linéarité sont observées et donc la transformation en question est linéaire. Une telle transformation est dite *rotation* d'angle α. Si $x = \overrightarrow{OM}$, $Ax = \overrightarrow{OM'}$ et si le point M parcourt une figure F, alors M' parcourt une figure F' qui s'obtient par rotation de F de l'angle donné α autour de O (fig. 10).

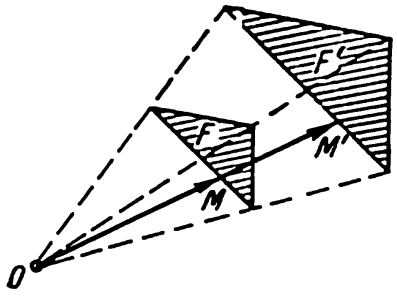

Fig. 9.

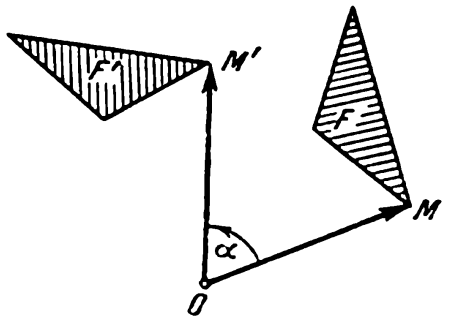

Fig. 10.

Exemple 3. Soit (a) une droite passant par le point O. Faisons correspondre à un vecteur arbitraire x le vecteur $x' = Ax$ symétrique par rapport à la droite (a). La transformation $x' = Ax$ est linéaire, car les deux conditions de linéarité sont manifestement observées. Une telle transformation est dite *symétrie* par rapport à la droite (a). Si $x = \overrightarrow{OM}$, $Ax = \overrightarrow{OM'}$ et si le point M parcourt une figure F, alors le point M' parcourt une figure F' qui est symétrique de F par rapport à la droite (a) (fig. 11).

Exemple 4. Soit (a) une droite passant par le point O. Faisons correspondre à un vecteur arbitraire $x = \overrightarrow{OM}$ le vecteur $x' = Ax = \overrightarrow{OM'}$ tel que : si P est la base de la perpendiculaire abaissée de M sur (a), alors M' appartient au rayon PM, de plus, $\frac{\overline{PM'}}{\overline{PM}} = k$ où k est un nombre positif donné (par exemple, si $k = 1/2$, l'image de M est un point M' qui est deux fois plus proche de (a) que M). La transformation $x' = Ax$ est linéaire : les conditions de linéarité seront déduites plus bas comme conséquence de certaines propositions générales (voir n° 65). La transformation linéaire considérée dans cet exemple est dite *contraction*

par rapport à la droite (a) ; le nombre k s'appelle *rapport de contraction* (notons qu'une contraction de coefficient $k > 1$ est en fait une dilatation). Si le point M parcourt une figure F, alors M' parcourt une figure F' qui s'appelle elle aussi contraction de F

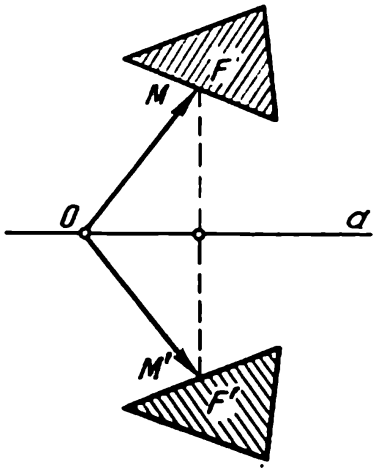

Fig. 11.

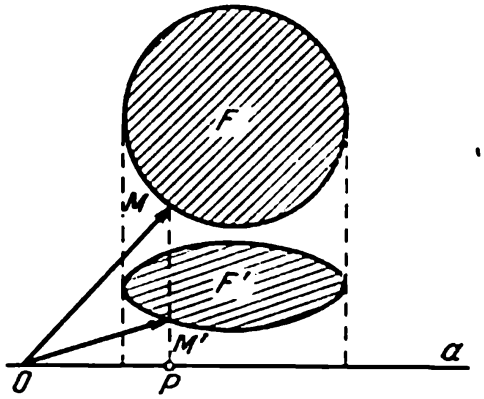

Fig. 12.

par rapport à la droite (a). Sur la figure 12, F est représentée par un cercle ; sa contraction F' est une ellipse.

62. On se propose maintenant d'exprimer une transformation linéaire en coordonnées. Prenons un couple de vecteurs

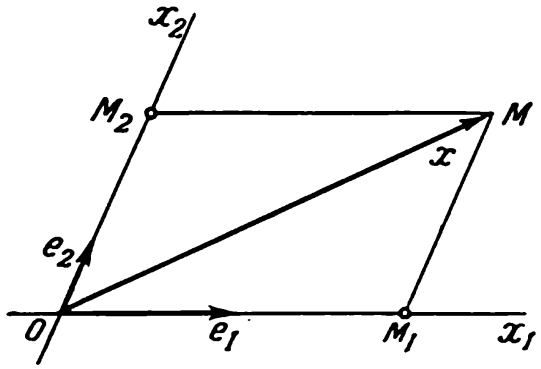

Fig. 13.

arbitraires, e_1, e_2, en exigeant seulement qu'ils soient non colinéaires. En supposant les e_1, e_2 appliqués au point O, considérons les axes Ox_1, Ox_2 qui les portent (fig. 13 ; nous supposons naturellement que le sens positif des axes est le sens des vecteurs e_1, e_2). Soit x un vecteur arbitraire. Comme les vecteurs e_1, e_2 sont non colinéaires, on peut décomposer le vecteur x par rapport à la base e_1, e_2 (voir le « Cours », n° 171 ; rappelons au lecteur que nous envisageons des vecteurs coplanaires). Autrement dit, le vec-

teur x peut être représenté sous la forme de la somme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2, \tag{1}$$

où $x_1 e_1 = \overrightarrow{OM}_1, x_2 e_2 = \overrightarrow{OM}_2$ sont les composantes du vecteur x suivant les axes Ox_1, Ox_2. Le nombre x_1 est la mesure algébrique de $\overrightarrow{OM}_1$ à condition de choisir pour unité la longueur du vecteur e_1; de même x_2 est la mesure algébrique de $\overrightarrow{OM}_2$ si l'on choisit pour l'unité de longueur e_2. Les nombres x_1, x_2 s'appellent *coordonnées ou composantes du vecteur x dans la base e_1, e_2*. Dans la suite, en même temps que l'expression (1) nous emploierons la notation $x = \{x_1; x_2\}$.

Si $x = \overrightarrow{OM}$, les nombres x_1, x_2 s'appellent également *coordonnées du point M* dans le système de coordonnées d'origine en O et de vecteurs de base e_1, e_2. Le point M de coordonnées x_1, x_2 sera noté comme d'habitude: $M(x_1; x_2)$.

Soit une transformation linéaire $x' = Ax$. Cette transformation associe à un couple de vecteurs de base e_1, e_2 le couple de vecteurs $e_1' = Ae_1$, $e_2' = Ae_2$. Supposons les vecteurs e_1', e_2' donnés, c'est-à-dire que soient connues leurs décompositions par rapport à la base e_1, e_2:

$$\left.\begin{aligned} e_1' = Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2, \\ e_2' = Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Montrons que les formules (2) définissent la transformation linéaire $x' = Ax$.

Soient $x = \{x_1; x_2\}$ un vecteur arbitraire, $x' = \{x_1'; x_2'\}$ son image (les coordonnées de ces vecteurs sont prises dans la base e_1, e_1). On a

$$x' = x_1'e_1 + x_2'e_2 = Ax = A(x_1e_1 + x_2e_2).$$

En utilisant les deux propriétés de linéarité de la transformation, on trouve

$$A(x_1e_1 + x_2e_2) = A(x_1e_1) + A(x_2e_2) = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 = x_1e_1' + x_2e_2'.$$

Par conséquent,

$$x' = x_1'e_1 + x_2'e_2 = x_1e_1' + x_2e_2'.$$

Remplaçons dans le second membre de cette dernière égalité les vecteurs e_1', e_2' par leurs décompositions (2); il vient

$$\begin{aligned} x' = x_1'e_1 + x_2'e_2 = x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2) + x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = \\ = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)e_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)e_2. \end{aligned}$$

D'où l'on tire, en comparant les coefficients des vecteurs de base identiques,

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ces formules permettent de trouver l'image $x' = \{x_1'; x_2'\}$ de tout vecteur $x = \{x_1; x_2\}$; les coefficients de ces formules sont connus si sont données les formules (2). On a montré donc que les formules définissent effectivement la transformation linéaire $x' = Ax$ qui transforme les vecteurs de base e_1, e_2 en les vecteurs e_1', e_2'. Ce même résultat peut être formulé comme suit : *si l'on connaît les images des vecteurs de base par une transformation linéaire, on connaît les images de tous les vecteurs par cette transformation.*

Les égalités (3) expriment linéairement les coordonnées du vecteur $x' = Ax$ en fonction de celles du vecteur x; nous les appellerons formules de définition de la transformation linéaire considérée $x' = Ax$ par rapport à la base donnée. Le tableau des coefficients des seconds membres de (3) sera noté A et appelé *matrice* de la transformation linéaire donnée par rapport à la base donnée

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \tag{4}$$

les nombres a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sont dits *éléments* de cette matrice.

Les matrices dont il est question possèdent quatre éléments disposés sur deux lignes et deux colonnes; les matrices de ce type sont des matrices carrées du second ordre.

Notons que la matrice des coefficients des formules (2) s'obtient par *transposition* de la matrice A, c'est-à-dire par permutation des éléments a_{12} et a_{21} symétriques par rapport à la diagonale principale (ces éléments ne sont pas nécessairement égaux). Une matrice transposée sera marquée ici et dans la suite d'un astérisque. Donc, la matrice des coefficients des formules (2) s'écrira comme suit :

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

63. Soient maintenant données des formules linéaires de la forme (3) où les coefficients a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sont quelconques. Ces formules définissent une transformation des vecteurs dans le plan; notamment, à un vecteur arbitraire $x = \{x_1; x_2\}$ est associé le vecteur $x' = \{x_1'; x_2'\}$, où x_1', x_2' sont définis par les formules (3). En écriture symbolique, cette transformation se

note $x' = Ax$. Montrons qu'elle est linéaire. Pour le prouver, il faut vérifier les deux conditions de linéarité.

1. Soit $x = \{x_1; x_2\}$, $Ax = x' = \{x'_1; x'_2\}$,

$$A(\lambda x) = x^* = \{x_1^*; x_2^*\}.$$

On a

$$\lambda x = \{\lambda x_1; \lambda x_2\};$$

par conséquent,

$$x_1^* = a_{11}(\lambda x_1) + a_{12}(\lambda x_2) = \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) = \lambda x'_1,$$
$$x_2^* = a_{21}(\lambda x_1) + a_{22}(\lambda x_2) = \lambda(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = \lambda x'_2.$$

Ainsi, $x^* = \lambda x'$, c'est-à-dire que

$$A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

On voit que la première condition est réalisée.

2. Soient $x = \{x_1; x_2\}$, $y = \{y_1; y_2\}$ des vecteurs arbitraires, $x' = Ax = \{x'_1; x'_2\}$, $y' = Ay = \{y'_1; y'_2\}$ leurs images, $A(x + y) = x^* = \{x_1^*; x_2^*\}$ l'image de la somme des vecteurs x et y. On a

$$x + y = \{x_1 + y_1; x_2 + y_2\};$$

donc

$$x_1^* = a_{11}(x_1 + y_1) + a_{12}(x_2 + y_2) =$$
$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + (a_{11}y_1 + a_{12}y_2) = x'_1 + y'_1,$$
$$x_2^* = a_{21}(x_1 + y_1) + a_{22}(x_2 + y_2) =$$
$$= (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2) = x'_2 + y'_2.$$

Ainsi, $x^* = x' + y'$, c'est-à-dire que

$$A(x + y) = Ax + Ay.$$

La seconde condition est également remplie, ce qui prouve que la transformation envisagée est linéaire.

Proposons-nous de trouver les images des vecteurs de base en supposant que la transformation linéaire est donnée par les formules (3). Ecrivons tout d'abord les égalités évidentes

$$e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2,$$
$$e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2.$$

Elles signifient que le vecteur e_1 a pour coordonnées par rapport à la base e_1, e_2 les nombres 1 et 0 et le vecteur e_2, les nombres 0 et 1; en notation symbolique

$$e_1 = \{1; 0\}, \quad e_2 = \{0; 1\}.$$

En portant au second membre des égalités (3) les coordonnées du vecteur e_1 on trouve

$$e_1' = \{a_{11};\ a_{21}\}.$$

D'une façon analogue,

$$e_2' = \{a_{12};\ a_{22}\}.$$

Nous avons trouvé les coefficients des composantes des vecteurs e_1', e_2' par rapport à la base e_1, e_2 et donc:

$$e_1' = a_{11}e_1 + a_{21}e_2;$$
$$e_2' = a_{12}e_1 + a_{22}e_2.$$

La matrice formée des coefficients de ces composantes a la forme (5) et s'obtient par transposition de la matrice (4).

64. Ainsi, *étant données une transformation linéaire* $x' = Ax$ *et une base* e_1, e_2, *la transformation envisagée est définie en coordonnées par les formules* (3). *Inversement, si sont données les formules* (3), *on peut affirmer qu'elles définissent, dans les coordonnées choisies, une transformation linéaire* $x' = Ax$. *La matrice A formée des coefficients des formules* (3) *et la matrice* A^* *formée des composantes des vecteurs* Ae_1, Ae_2 *par rapport à la base* e_1, e_2 *se déduisent l'une de l'autre par transposition.*

65. Pour illustrer ce qui vient d'être exposé, nous allons trouver les formules définissant les transformations linéaires envisagées dans les exemples du n° 61.

Exemple 1. Soit $x' = Ax$ une homothétie de rapport k, autrement dit, $Ax = kx$.

Prenons une base e_1, e_2 arbitraire. Nous avons $x = \{x_1; x_2\}$, $x' = \{x_1'; x_2'\}$, $x' = kx$; par conséquent,

$$x_1' = kx_1,\ x_2' = kx_2.$$

Nous avons obtenu les formules définissant la transformation linéaire donnée. En écrivant les formules obtenues sous la forme

$$x_1' = kx_1 + 0 \cdot x_2,$$
$$x_2' = 0 \cdot x_1 + kx_2,$$

on trouve la matrice de l'homothétie:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. Soit $x' = Ax$ une rotation d'angle α.

Considérons une base i, j composée de deux vecteurs unitaires et deux à deux perpendiculaires. Alors, si $x = \{x_1; x_2\}$, on a $x_1 =$

$= \rho \cos \theta$, $x_2 = \rho \sin \theta$, où ρ, θ sont les coordonnées polaires de l'extrémité du vecteur x. Etant donné que le vecteur $x' = Ax = \{x_1'; x_2'\}$ s'obtient par rotation de x d'angle α autour du point O, on a $x_1' = \rho \cos(\theta + \alpha)$, $x_2' = \rho \sin(\theta + \alpha)$. D'où

$$x_1' = \rho \cos(\theta + \alpha) = \rho [\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta],$$
$$x_2' = \rho \sin(\theta + \alpha) = \rho [\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta];$$

en ouvrant les crochets et en posant $\rho \cos \theta = x_1$, $\rho \sin \theta = x_2$, on trouve

$$x_1' = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha,$$
$$x_2' = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha.$$

Ce sont précisément les formules définissant la rotation donnée par rapport à la base i, j. La matrice de la rotation s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Exemple 3. Soit $x' = Ax$ une symétrie par rapport à une droite (a). Prenons une base i, j telle que le vecteur i soit supporté par la droite (a). Alors, si $x = \{x_1; x_2\}$, $x' = Ax = \{x_1'; x_2'\}$, on a

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = -x_2.$$

C'est la représentation dans la base i, j d'une symétrie par rapport à l'axe Ox_1. La matrice de cette transformation est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4. Soit $x' = Ax$ une contraction par rapport à une droite (a) de rapport k. Prenons une base i, j telle que le vecteur i soit porté par la droite (a). Alors, si $x = \{x_1; x_2\}$, $x' = Ax = \{x_1'; x_2'\}$, on a

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = kx_2.$$

C'est la représentation dans la base i, j d'une contraction de rapport k par rapport à l'axe Ox_1. La matrice de cette contraction Ox_1 est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Notons qu'au n° 61, où la contraction a été mentionnée pour la première fois, on n'a pas démontré la linéarité de cette transformation. Maintenant il est clair que la contraction est une transformation linéaire puisque le sont les formules qui la définissent.

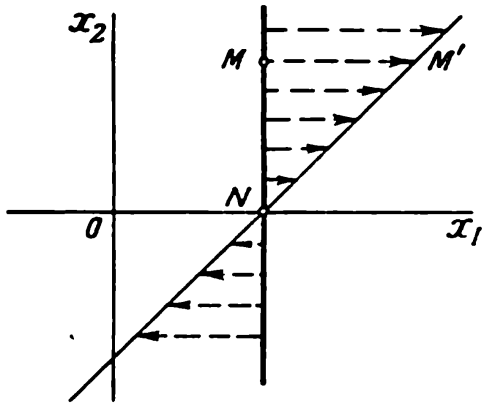

Fig. 14.

66. En conclusion de ce paragraphe, considérons encore un exemple où la transformation linéaire est définie par les formules:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= \quad x_2 \end{aligned}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(la base étant i, j). Si $x = \{x_1; x_2\} = \overrightarrow{OM}$, $x' = \{x_1'; x_2'\} = \overrightarrow{OM'}$, alors M' se déduit de M par une x_2-translation parallèlement à l'axe Ox_1 (les points de l'axe Ox_1 sont invariants par cette transformation). Nous appellerons cette transformation contraction du plan (voir fig. 14, où les flèches en pointillé indiquent le déplacement des points de la droite MN).

§ 13. Produit de transformations linéaires dans le plan et produit de matrices carrées du second ordre. Addition de matrices. Multiplication d'une matrice par un scalaire

67. Soient deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Prenons une base arbitraire e_1, e_2. Si maintenant nous écrivons d'après la matrice donnée A les formules (3) du § 12, nous définirons par là même une transformation linéaire Ax; d'une façon analogue, d'après la matrice B, toujours dans la même base, nous définirons une transformation Bx.

Les transformations linéaires Ax et Bx nous serviront à établir une nouvelle transformation linéaire. Notamment, prenons un vecteur arbitraire $x = \{x_1; x_2\}$; la transformation de matrice B le transforme en un vecteur que nous désignerons par y: $y = Bx = \{y_1; y_2\}$; l'autre transformation donnée changera le vecteur obtenu en un vecteur x': $x' = Ay = \{x_1'; x_2'\}$. C'est ainsi qu'à

tout vecteur x est associé un vecteur x', c'est-à-dire qu'on a établi une transformation déterminée de vecteurs. Cette transformation est nommée *produit* des deux transformations données et se note ABx. On peut exprimer ce qu'on vient de dire par une seule formule :

$$ABx = A\,(Bx). \tag{1}$$

Utilisant la formule (1), il est aisé de montrer que le produit de deux transformations linéaires est également une transformation linéaire. Cependant, nous préférons établir ce fait par une autre voie, notamment à l'aide des formules définissant les transformations linéaires données ; en même temps nous trouverons la matrice de leur produit.

Comme $y = Bx$, on a

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Comme $x' = Ay$, on a

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ x'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

En remplaçant dans ces dernières formules y_1, y_2 par leurs expressions (2), on trouve

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})\,x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})\,x_2, \\ x'_2 &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})\,x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})\,x_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ce sont les formules définissant la transformation $x' = ABx$ (par rapport à la base donnée e_1, e_2). Les formules (4) étant linéaires, la transformation vectorielle qu'elles définissent l'est aussi (voir § 12). Nous avons donc démontré que le produit de deux transformations linéaires est une transformation linéaire.

68. *La matrice du produit de deux transformations linéaires s'appelle produit des matrices de ces transformations.* Si les transformations données sont Ax et Bx, à leur produit ABx correspond le produit des matrices A et B que l'on désigne par AB. Conformément à (4)

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

ou

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Considérons un élément du produit des matrices données, par exemple $a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$. Cet élément est situé à l'intersection de la première ligne avec la seconde colonne. Remarquons qu'il est composé des éléments a_{11}, a_{12} de la première ligne de la matrice A et des éléments b_{12}, b_{22} de la deuxième colonne de la matrice B, les éléments de la ligne étant multipliés par les éléments correspondants (dans l'ordre) de la colonne et les produits obtenus ajoutés. La quantité qui se forme d'après la règle susindiquée est dite produit d'une ligne par une colonne; en particulier, $a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$ est le produit de la première ligne de la matrice A par la deuxième colonne de la matrice B. On établit à partir de (6) que *pour obtenir un élément du produit AB appartenant à la i-ième ligne et à la k-ième colonne* ($i = 1$ ou 2, $k = 1$ ou 2) *il faut multiplier la i-ième ligne de la matrice A par la k-ième colonne de la matrice B.*

69. Attirons l'attention sur le fait que le produit de transformations linéaires dépend de l'ordre dans lequel elles s'effectuent; l'ordre d'exécution des transformations données est indiqué dans l'écriture du produit. La notation $ABx = A(Bx)$ signifie que le vecteur x subit d'abord la transformation B et puis son image se transforme à l'aide de A. Si l'on commence par effectuer sur x la transformation A pour transformer ensuite le résultat Ax par la transformation B, le produit est $BAx = B(Ax)$. En général, $ABx \neq BAx$ (bien que pour certaines transformations A et B on puisse avoir l'égalité $ABx = BAx$ quel que soit x).

De même, le produit de matrices dépend de l'ordre des facteurs, c'est-à-dire qu'en général la matrice AB ne coïncide pas avec la matrice BA (il peut exister des cas particuliers où $AB = BA$). Il est aisé de comprendre que le produit de matrices dépend de l'ordre des facteurs si l'on réfléchit bien à la règle de multiplication des matrices. En effet, tout élément du produit de deux matrices est le produit d'une ligne du premier facteur par une colonne du second; il est évident que les facteurs ne peuvent être permutés.

Exemple. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices AB et BA sont différentes.

70. Considérons deux autres exemples.

Exemple 1. Soient Ax une rotation d'angle α, Bx une rotation d'angle β (voir n^{os} 61 et 65). Manifestement, ABx est une rotation d'angle $\alpha + \beta$; dans ce cas $ABx = BAx$.

Prenons une base spéciale i, j; les transformations données auront respectivement les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

En appliquant la règle de multiplication des matrices on trouve

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}.$$

D'où

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Ce résultat était prévisible, étant donné que AB est la matrice d'une rotation d'angle $\alpha + \beta$. Dans le cas considéré les matrices AB et BA sont identiques.

Exemple 2. Soient Ax une contraction de rapport k_1 relativement à l'axe Ox_2 (c'est-à-dire dans la direction de l'axe Ox_1), Bx une contraction de rapport k_2 relativement à l'axe Ox_1 (dans la direction de l'axe Ox_2) (voir n^{os} 61 et 65). Les matrices de ces transformations sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix};$$

en multipliant A par B on trouve

$$AB = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Une matrice de cette forme est dite *diagonale*. Ainsi, une matrice diagonale correspond au produit de deux contractions par rapport aux axes de coordonnées.

71. Introduisons la notion d'égalité des matrices. Deux matrices sont égales si leurs éléments correspondants sont égaux. Autrement dit, en écrivant $A = B$ on sous-entend que les matrices A et B sont des tableaux parfaitement identiques de nombres.

72. Soient trois matrices A, B, C. Multiplions B par C puis A par le produit BC; le résultat de ces opérations est la matrice $A(BC)$. On peut procéder autrement; notamment, on peut multiplier le produit AB par la matrice C; on obtient alors la

matrice $(AB)\,C$. Il est facile de s'assurer que

$$A\,(BC) = (AB)\,C. \tag{7}$$

Pour le prouver nous allons utiliser les transformations linéaires Ax, Bx, Cx auxquelles correspondent (par rapport à une base quelconque) les matrices A, B et C. Considérons le produit $A\,(BC)\,x$ des transformations effectuées dans l'ordre suivant: x est soumis d'abord à la transformation C, puis on opère sur son image la transformation B pour soumettre enfin le résultat à la transformation A. En notation symbolique

$$A\,(BC)\,x = A\,(B\,(Cx)).$$

Or la transformation qui est le produit de ABx par Cx:

$$(AB)\,Cx = A\,(B\,(Cx))$$

s'effectue de la même façon. Par conséquent, les transformations $A\,(BC)\,x$ et $(AB)\,Cx$ sont identiques, d'où l'on déduit l'égalité des matrices (7).

Comme le produit des trois matrices est associatif on a $ABC = A\,(BC) = (AB)\,C$. Ce produit n'est, on l'a vu, en général, pas commutatif, i.e. $ABC \neq ACB$.

Le produit d'un nombre quelconque de matrices se définit comme celui de trois matrices, en multipliant successivement les facteurs donnés; par exemple $ABCD = A\,(B\,(CD))$.

73. On définit les puissances naturelles des matrices comme celles des nombres:

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A \cdot A,$$

par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

74. Dans certains domaines des mathématiques et dans les applications on a à considérer les sommes et les différences de matrices ainsi que le produit d'une matrice par un scalaire. On appelle somme des matrices A et B une matrice dont les éléments sont obtenus en ajoutant les éléments respectifs des matrices données A et B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}.$$

La différence $A - B$ se définit d'une façon analogue. On appelle produit d'une matrice A par un nombre λ une matrice dont les éléments s'obtiennent en multipliant les éléments de A par λ:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Les définitions ci-dessus permettront de comprendre la signification d'expressions matricielles plus complexes. Si, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

alors

$$A^2 + 5A = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 30 & 42 \end{pmatrix}$$

75. En conclusion de ce paragraphe donnons la loi de composition du produit et de la transposition des matrices. On rappelle que les matrices transposées sont affectées d'un astérisque. Si A est une matrice donnée, A^* est sa transposée (pour les matrices du second ordre la transposition se ramène à la permutation des éléments symétriques par rapport à la diagonale principale).

On a l'identité suivante:

$$(AB)^* = B^*A^*, \tag{8}$$

c'est-à-dire *que le produit transposé est égal au produit des facteurs transposés pris dans l'ordre inverse.* Pour démontrer l'identité (8) il suffit de remarquer que les lignes de la matrice donnée sont les colonnes de sa transposée, si bien que l'élément du produit B^*A^* situé à l'intersection de la i-ième ligne avec la k-ième colonne s'obtient en multipliant la i-ième colonne de la matrice B par la k-ième ligne de la matrice A. Mais on a un élément identique dans le produit AB à l'intersection de la k-ième ligne avec la i-ième colonne. Ce qui prouve que, après transposition, AB coïncide avec B^*A^*.

§ 14. Théorème du déterminant du produit de deux matrices

76. Convenons de noter, ici et dans la suite, le déterminant d'une matrice carrée donnée A par le symbole Det A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{Det } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

77. On a le théorème suivant.

Théorème. *Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants de ces matrices*:

$$\text{Det}\,(AB) = \text{Det}\,A \cdot \text{Det}\,B. \tag{1}$$

Démonstration. Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix};$$

alors

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Introduisons les notations: $\Delta_1 = \text{Det}\,A$, $\Delta_2 = \text{Det}\,B$, $\Delta = \text{Det}\,(AB)$. On a d'après (2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11}b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{21}b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

La somme obtenue ci-dessus est composée de quatre déterminants formés avec les éléments de la matrice A. Il est évident que le premier et le dernier déterminants sont nuls; le second est Δ_1, le troisième est égal à Δ_1 mais de signe contraire. Ainsi,

$$\Delta = b_{11}b_{22}\Delta_1 - b_{21}b_{12}\Delta_1 = (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})\,\Delta_1 = \Delta_1\Delta_2.$$

Le théorème est démontré. Ce théorème est appelé également théorème du produit des déterminants.

§ 15. Signification géométrique du déterminant d'une transformation linéaire. Transformations singulières

78. Soient x, y deux vecteurs arbitraires donnés par leurs composantes par rapport à une base e_1, e_2:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1e_1 + x_2e_2, \\ y &= y_1e_1 + y_2e_2; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

comme auparavant, nous considérons que les vecteurs sont situés dans un plan (α).

Désignons par S_0 l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs de base e_1, e_2, par n le vecteur unitaire normal au plan (α) et dirigé dans le même sens que le produit vectoriel $[e_1, e_2]$; alors

$$[e_1 e_2] = S_0 n. \tag{2}$$

Notons que lorsque tous les vecteurs sont amenés à avoir une origine commune O, la plus courte rotation du vecteur e_1 vers le vecteur e_2 dans le plan (α) est effectuée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour un observateur placé dans le sens de n.

Notons par S l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs x, y; alors

$$[x, y] = \pm S n, \tag{3}$$

le signe plus correspond au cas où la plus courte rotation du vecteur x vers le vecteur y est effectuée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour un observateur placé dans le sens de n et le signe moins, au cas où cette rotation est effectuée dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans le premier cas nous dirons que les couples de vecteurs x, y (en considérant x le premier vecteur) et e_1, e_2 sont de même orientation et dans le second cas qu'ils sont d'orientation contraire. Si les vecteurs x, y sont colinéaires, alors $S = 0$ et la question du signe dans la formule (3) ne se pose plus.

Trouvons l'expression de S en supposant connus S_0 et les coefficients des formules (1). On a

$$\begin{aligned}[x, y] = [(x_1 e_1 + x_2 e_2)(y_1 e_1 + y_2 e_2)] &= x_1 y_1 [e_1 e_1] + \\ &+ x_1 y_2 [e_1 e_2] + x_2 y_1 [e_2 e_1] + x_2 y_2 [e_2 e_2] = \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)[e_1 e_2].\end{aligned}$$

D'où, compte tenu des égalités (2) et (3), on trouve

$$\pm S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} S_0.$$

C'est l'expression cherchée de S.

Convenons d'appeler aire orientée du parallélogramme construit sur le couple de vecteurs x, y le nombre $+S$ si les couples x, y et e_1, e_2 sont de même orientation, et le nombre $-S$ si ces couples sont d'orientation contraire (dans le couple x, y le vecteur x est considéré comme premier); une aire orientée sera notée par σ.

On déduit de l'égalité précédente

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} S_0. \tag{4}$$

79. Considérons une transformation linéaire arbitraire $x' = Ax$ définie par les relations

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

par rapport à une base donnée e_1, e_2.

Prenons un couple de vecteurs arbitraire $x = \{x_1; x_2\}$, $y = \{y_1; y_2\}$. Désignons par σ l'aire orientée du parallélogramme construit sur le couple de vecteurs x, y et par σ', l'aire orientée du parallélogramme construit sur le couple de leurs images $x' = Ax$, $y' = Ay$. Etablissons une relation entre σ et σ'. Selon la formule (4)

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} S_0. \tag{6}$$

Si $x' = \{x_1'; x_2'\}$, $y' = \{y_1'; y_2'\}$, alors

$$\sigma' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} S_0. \tag{7}$$

Conformément à (5)

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2.$$

D'où, en utilisant la règle de multiplication des matrices

$$\begin{pmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le théorème du produit des déterminants, on obtient à partir de cette égalité matricielle l'égalité correspondante pour les déterminants:

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

En multipliant les deux membres de cette dernière égalité par S_0 et compte tenu de (6) et de (7), on trouve la relation cherchée

$$\sigma' = \sigma \operatorname{Det} A. \tag{8}$$

Ainsi, *une transformation linéaire du plan transforme un parallélogramme en un parallélogramme de telle sorte que leurs aires orientées soient proportionnelles; le coefficient de proportionnalité est égal au déterminant de la transformation.* La formule (8) suggère également la conclusion suivante: si Det $A > 0$, les couples de vecteurs x, y et de leurs images sont de même orientation (σ et σ' sont de même signe); si Det $A < 0$, les couples x, y et x', y' sont de sens contraires. Autrement dit, lorsque Det $A > 0$, la transformation conserve l'orientation de tous les couples de vecteurs du plan donné, lorsque Det $A < 0$, la transformation change le sens des vecteurs.

80. Considérons maintenant une transformation linéaire $x' = Ax$ telle que Det $A = 0$. Dans ce cas la formule (8) donne $\sigma' = 0$ quel que soit σ. Par conséquent, la transformation envisagée transforme tout couple de vecteurs x, y en un couple de vecteurs colinéaires x', y'. En particulier, seront colinéaires les images e_1', e_2' des vecteurs de base e_1, e_2. Désignons par (a') la droite passant par le point O et portant les vecteurs e_1', e_2'. Revenons au n° 62 où il a été montré que l'image $x' = Ax$ de tout vecteur $x = \{x_1; x_2\}$ peut être représentée sous la forme

$$x' = x_1 e_1' + x_2 e_2'.$$

On en déduit que si Det $A = 0$, les images de tous les vecteurs du plan donné sont situées sur une même droite (a'); on peut dire aussi que les images de tous les points du plan donné sont portées par une droite, c'est-à-dire que tout le plan est appliqué dans une certaine droite. Une telle transformation du plan est dite *singulière*; conformément à ce qui vient d'être exposé, *une transformation linéaire singulière est caractérisée par la condition* Det $A = 0$. Sous cette condition, une matrice A est dite elle aussi singulière.

Exemple. La transformation linéaire

$$x_1' = x_1 + x_2,$$
$$x_2' = x_1 + x_2$$

est singulière, vu que les images de tous les points sont situées sur la droite $x_1' = x_2'$. En même temps on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et Det $A = 0$.

§ 16. Inversion d'une transformation linéaire dans le plan

81. Envisageons dans un plan donné une transformation linéaire $x' = Ax$. Ici x' est l'image du vecteur x; dans ce cas x se nomme *image réciproque* ou *antécédent* de x'. Proposons-nous de trouver l'antécédent x de t o u t vecteur x'. Indiquer la règle permettant de trouver l'antécédent x de chaque vecteur x' équivaut à donner dans le plan une nouvelle transformation associant à x' le vecteur x. Une telle transformation est dite *inverse de la transformation donnée* et se note $x = A^{-1}x'$.

82. Supposons la transformation donnée $x' = Ax$ singulière; les images de tous les vecteurs du plan se disposent alors sur une droite (a'). Un vecteur x' qui n'est pas porté par cette droite n'a pas d'antécédent. Donc, *une transformation singulière n'a pas de transformation inverse.*

83. Soit maintenant $x' = Ax$ une transformation régulière, définie par les formules

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \tag{1}$$

par rapport à une base e_1, e_2, et

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

sa matrice. La transformation $x' = Ax$ étant supposée régulière,

$$\Delta = \operatorname{Det} A \neq 0.$$

Dans les égalités (1) les quantités x'_1, x'_2 sont les coordonnées de l'image, les quantités x_1, x_2, celles de l'image réciproque. Pour trouver l'inverse de la transformation donnée, il y a lieu d'exprimer x_1, x_2 en fonction de x'_1, x'_2, c'est-à-dire de résoudre le système (1) par rapport à x_1, x_2 en supposant x'_1, x'_2 connus. Comme $\Delta \neq 0$, on peut écrire (voir le « Cours », Appendice, § 1)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x'_1 & a_{12} \\ x'_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x'_1 \\ a_{21} & x'_2 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

D'où

$$x_1 = \frac{a_{22}}{\Delta}x'_1 - \frac{a_{12}}{\Delta}x'_2, \quad x_2 = -\frac{a_{21}}{\Delta}x'_1 + \frac{a_{11}}{\Delta}x'_2. \tag{3}$$

Nous avons obtenu les formules définissant la transformation $x = A^{-1}x'$ inverse de la transformation linéaire donnée $x' = Ax$ (par rapport à la même base e_1, e_2). Les relations (3) étant linéai-

res, on en déduit que *la transformation inverse est également linéaire*. La matrice de la transformation inverse $A^{-1}x'$ se note A^{-1}, elle est appelée *matrice inverse*, ou *réciproque*, de la matrice donnée A. En vertu de (3)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & -\frac{a_{12}}{\Delta} \\ -\frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Ainsi, *chaque transformation linéaire régulière possède une transformation inverse, linéaire elle aussi*; la matrice A^{-1} de la transformation inverse (matrice inverse) est donnée par l'égalité (4) si l'on connaît la matrice A de la transformation donnée.

84. Signalons la transformation linéaire spéciale suivante: $x' = x$; dans ce cas tout vecteur x est transformé en lui-même. Une telle transformation est dite *identique*. Les formules définissant la transformation identique s'écrivent

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2$$

quelle que soit la base considérée. La matrice de la transformation identique est désignée par E et porte le nom de *matrice unité*; de toute évidence

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

85. Soient $x' = Ax$ une transformation linéaire quelconque et $x = A^{-1}x'$, son inverse. Considérons le produit de ces transformations: on a $A^{-1}Ax = x$ (d'abord A transforme le vecteur x en son image x', et puis la transformation inverse A^{-1} transforme le vecteur x' en son antécédent x). Par conséquent, *le produit d'une transformation donnée et de son inverse est une transformation identique*. Donc

$$A^{-1}A = E, \tag{5}$$

c'est-à-dire que le produit d'une matrice et de son inverse est une matrice unité.

En permutant les facteurs dans le produit d'une transformation par son inverse, on obtient également une transformation identique, à savoir $AA^{-1}x' = x'$; donc outre l'égalité (5) on a

$$AA^{-1} = E. \tag{6}$$

86. Signalons que, dans la théorie des matrices, la matrice unité joue le même rôle que l'unité en arithmétique. Notamment, en multipliant une matrice par la matrice unité on nechange

pas la valeur de la matrice donnée:

$$AE = A, \quad EA = A; \tag{7}$$

on s'assure facilement qu'il en est ainsi en calculant AE (ou EA) d'après la règle de multiplication de matrices.

87. Exemple. Soit une transformation linéaire donnée par les formules:

$$x_1' = 3x_1 + 2x_2,$$
$$x_2' = 7x_1 + 5x_2,$$

trouver la transformation inverse.

Solution. On a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix},$$

Det $A = 1 \neq 0$. La matrice A est régulière et donc possède un inverse. Conformément à (4), on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'où l'on obtient les formules définissant la transformation inverse

$$x_1 = 5x_1' - 2x_2',$$
$$x_2 = -7x_1' + 3x_2'.$$

§ 17. Transformation des coordonnées des vecteurs lors du passage à une nouvelle base

88. Etablissons les formules de transformation des coordonnées d'un vecteur quelconque du plan lors du changement de base.

Soient e_1, e_2 l'ancienne base, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ la nouvelle. Supposons connus les coefficients des décompositions des vecteurs $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ dans l'ancienne base e_1, e_2:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= l_{11}e_1 + l_{21}e_2, \\ \tilde{e}_2 &= l_{12}e_1 + l_{22}e_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Formons la matrice des coefficients des seconds membres de (1) que nous noterons L^*:

$$L^* = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Considérons dans le plan donné un vecteur arbitraire x; les coordonnées x_1, x_2 du vecteur x dans l'ancienne base se définissent comme les coefficients de la décomposition de x dans cette base:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

De façon analogue, les coordonnées $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ du même vecteur $\tilde{x}$ dans la nouvelle base se définissent à partir de la décomposition

$$\tilde{x} = \tilde{x}_1 \tilde{e}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{e}_2.$$

D'où

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = \tilde{x}_1 \tilde{e}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{e}_2. \tag{3}$$

Remplaçons dans l'égalité (3) les vecteurs $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ selon les formules (1); il vient après réduction des termes semblables

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = (l_{11}\tilde{x}_1 + l_{12}\tilde{x}_2)\, e_1 + (l_{21}\tilde{x}_1 + l_{22}\tilde{x}_2)\, e_2.$$

En comparant les coefficients des vecteurs de base de même indice écrits à gauche et à droite dans cette dernière égalité on trouve

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}\tilde{x}_1 + l_{12}\tilde{x}_2, \\ x_2 &= l_{21}\tilde{x}_1 + l_{22}\tilde{x}_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

On a obtenu les formules cherchées de transformation des coordonnées des vecteurs. Désignons par L la matrice des coefficients des formules (3)

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Il est évident que les matrices L et L^* se transforment l'une en l'autre par transposition (l'astérisque marquant la transposée).

Rappelons-nous que les vecteurs de base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ (de même que e_1, e_2) ne sont pas colinéaires; il s'ensuit que le déterminant de la matrice L^* est non nul (voir n° 78). Or

$$\operatorname{Det} L^* = \operatorname{Det} L$$

et

$$\operatorname{Det} L \neq 0.$$

Si donc la nouvelle base est donnée par les formules (1), les anciennes coordonnées de n'importe quel vecteur s'expriment en fonction de ses nouvelles coordonnées à l'aide des formules (4);

les matrices formées avec les coefficients des formules (1) et (4) se déduisent l'une de l'autre par transposition et sont toutes deux régulières.

89. Si $x = \overrightarrow{OM}$, les coordonnées du vecteur x sont celles du point M. Pour cette raison les formules (4) sont en même temps les formules de transformation des coordonnées des points par changement de base (laissant invariante l'origine des coordonnées).

90. Considérons un cas particulier de transformation de coordonnées lorsque 1) l'ancienne base est formée de vecteurs unitaires orthogonaux i, j; 2) la nouvelle base $\tilde{i}, \tilde{j}$ est du même type. Changeons la notation des coefficients des formules (1) et écrivons celles-ci comme suit:

$$\tilde{i} = l_1 i + m_1 j,$$
$$\tilde{j} = l_2 i + m_2 j;$$

d'où

$$L^* = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\tilde{i}^2 = 1$, $\tilde{j}^2 = 1$, $\tilde{i}\tilde{j} = 0$, alors

$$l_1^2 + m_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \tag{6}$$

En vertu des égalités (6) on trouve en employant la règle de multiplication des matrices:

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{7}$$

inversement, de (7) découle (6). La relation (7) s'écrit sous la forme condensée:

$$L^* L = E; \tag{8}$$

d'où

$$L^* = L^{-1}. \tag{9}$$

La matrice L vérifiant la condition (8) est dite *orthogonale*. En s'appuyant sur (9) on peut dire aussi que *la matrice orthogonale L présente cette particularité que son inverse coïncide avec sa transposée.*

En résumé, les formules de transformation de coordonnées traduisant le passage d'une base i, j à une base analogue $\tilde{i}, \tilde{j}$ possèdent une matrice orthogonale. Notons encore que (8) permet

d'écrire l'égalité numérique

$$\text{Det } L^* \cdot \text{Det } L = 1,$$

d'où $(\text{Det } L)^2 = 1$. Par conséquent,

$$\text{Det } L = \pm 1, \tag{10}$$

c'est-à-dire que le déterminant d'une matrice orthogonale ne peut être que $+1$ ou -1.

Dans le premier cas les bases i, j et $\tilde{i}$, $\tilde{j}$ sont de même orientation, dans le second cas, d'orientation contraire (voir n° 78, formule (4), ainsi que le § 1).

91. Revenons au cas général de changement de coordonnées.

En comparant les formules (4) avec les formules (3) du § 12, on établit facilement leur totale analogie algébrique. Or, leur signification géométrique est tout à fait différente.

En effet, les formules (3) du § 12 expriment les coordonnées de l'image x' en fonction de celles de l'antécédent x (par rapport à une même base), quant aux formules (4), elles donnent les anciennes coordonnées du vecteur x en fonction des nouvelles coordonnées du même vecteur x (lors d'un changement de base).

Il semble intéressant d'établir une règle commune d'écriture symbolique de telles formules, indépendamment de leur signification géométrique. Pour ce faire, considérons des relations arbitraires de la forme

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

en supposant donnée la matrice de leurs coefficients:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

On peut remplacer les formules (11) par une seule égalité symbolique

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

dont le second membre est considéré comme produit de la matrice carrée B par une matrice colonne; ce produit (le premier membre de l'égalité (12)) est lui aussi une matrice colonne. L'égalité (12) se lit comme suit: pour obtenir y_1 il faut multiplier la première ligne de la matrice B par la colonne x_1, x_2; pour obtenir y_2 il faut multiplier cette colonne par la seconde ligne de la matrice B (voir formules (11)). Convenons maintenant de désigner le couple de

nombres x_1, x_2 par la lettre X et le couple y_1, y_2 par la lettre Y. Avec ces notations l'égalité (12) s'écrit simplement comme

$$Y = BX. \tag{13}$$

On peut dire que le couple de nombres Y s'obtient par multiplication de la matrice B par le couple de nombres X (ou par multiplication du couple de nombres X par la matrice B). Supposons que le couple de nombres Y est multiplié à son tour par une matrice A, le résultat de cette opération étant un nouveau couple de nombres X':

$$X' = AY.$$

Alors

$$X' = ABX,$$

c'est-à-dire que l'on peut obtenir X' en multipliant directement le produit des matrices AB par X. Pour s'en convaincre, il suffit de s'adresser au produit de transformations linéaires; ce que nous venons de considérer ne diffère en rien du produit des transformations linéaires données par leurs formules (voir formules (2), (3), (4) au n° 67).

Dans l'écriture symbolique que nous avons introduite les formules (4) s'écriront comme suit:

$$X = L\tilde{X}, \tag{14}$$

où X est le couple d'anciennes coordonnées du vecteur et $\tilde{X}$ celui de ses nouvelles coordonnées. D'où

$$\tilde{X} = L^{-1}X; \tag{15}$$

ceci veut dire que le couple de nouvelles coordonnées du vecteur se déduit du couple de ses anciennes coordonnées par multiplication par la matrice L^{-1}. Dans le cas particulier où L est une matrice orthogonale, on a

$$X = L\tilde{X}, \quad \tilde{X} = L^*X. \tag{16}$$

Il est très instructif de comparer les formules (16) avec les formules (3) et (6) du § 1.

§ 18. Changement de la matrice d'une transformation linéaire dans le plan par passage à une nouvelle base

92. Les formules de définition et la matrice d'une transformation linéaire dépendent du choix de la base. Nous allons établir la loi de changement de la matrice d'une transformation linéaire lorsque l'on passe à une nouvelle base.

93. Soit $x' = Ax$ une transformation linéaire de vecteurs dans le plan, définie par les formules

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

sa matrice par rapport à la base e_1, e_2. Passons à une nouvelle base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$. Les coordonnées de tous les vecteurs se transforment alors d'après les formules:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}\tilde{x}_1 + l_{12}\tilde{x}_2, \\ x_2 &= l_{21}\tilde{x}_1 + l_{22}\tilde{x}_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

de matrice

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}.$$

Notons par X le couple d'anciennes coordonnées du vecteur x, par $\tilde{X}$ le couple de ses nouvelles coordonnées: $X = \{x_1; x_2\}$, $\tilde{X} = \{\tilde{x}_1; \tilde{x}_2\}$. D'une façon analogue, notons par X' et $\tilde{X}'$ les couples d'anciennes et de nouvelles coordonnées du vecteur x': $X' = \{x_1'; x_2'\}$, $\tilde{X}' = \{\tilde{x}_1'; \tilde{x}_2'\}$.

En considérant que les formules (2) se rapportent aux coordonnées du vecteur x, écrivons-les sous la forme condensée:

$$X = L\tilde{X}.$$

Or les coordonnées du vecteur x' se transforment suivant les mêmes formules, donc

$$X' = L\tilde{X}'.$$

Les relations (1) donnant la transformation envisagée dans la base e_1, e_2 peuvent être écrites de façon analogue

$$X' = AX.$$

Ces trois dernières relations nous amènent à

$$L\tilde{X}' = AL\tilde{X}.$$

Au premier et au second membre de cette relation figure un couple de nombres. Multiplions-le par la matrice L^{-1}, il vient

$$L^{-1}L\tilde{X}' = L^{-1}AL\tilde{X}. \tag{3}$$

Comme $L^{-1}L = E$ (matrice unité), la multiplication par $L^{-1}L$ ne change pas le couple concerné, si bien que l'égalité (3) peut

être écrite ainsi :

$$\widetilde{X}' = L^{-1}AL\widetilde{X}. \tag{4}$$

Cette égalité exprime le couple de nouvelles coordonnées du vecteur x' en fonction du couple de nouvelles coordonnées du vecteur x ; par conséquent, l'égalité (4) n'est autre que la relation donnant la transformation linéaire $x' = Ax$ dans la nouvelle base. En désignant la matrice de la transformation linéaire donnée dans la nouvelle base par $\widetilde{A}$, on obtient à partir de (4)

$$\widetilde{A} = L^{-1}AL. \tag{5}$$

Ainsi, *lorsque l'on passe à une nouvelle base*

$$\widetilde{e}_1 = l_{11}e_1 + l_{21}e_2,$$
$$\widetilde{e}_2 = l_{12}e_1 + l_{22}e_2,$$

la matrice A de toute transformation linéaire dans le plan se trouve remplacée par une matrice $\widetilde{A}$ exprimée par l'égalité (5) ; *dans cette égalité*

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}.$$

Signalons un corollaire très important de la formule (5). Notamment, en vertu du théorème du déterminant du produit de matrices on a

$$\operatorname{Det}\widetilde{A} = \operatorname{Det}L^{-1} \cdot \operatorname{Det}A \cdot \operatorname{Det}L = \operatorname{Det}A \cdot \operatorname{Det}L^{-1} \cdot \operatorname{Det}L.$$

Mais $L^{-1}L = E$, alors

$$\operatorname{Det}L^{-1} \cdot \operatorname{Det}L = \operatorname{Det}E = 1.$$

Ainsi

$$\operatorname{Det}\widetilde{A} = \operatorname{Det}A,$$

c'est-à-dire que *le déterminant de la matrice d'une transformation linéaire est invariant par changement de base.* Au fond, ce fait a été établi déjà au n° 79 où on a montré que le déterminant d'une transformation est le coefficient de proportionnalité des aires d'une figure et de son image. Comme l'aire d'une figure ne dépend pas du choix des coordonnées, le déterminant considéré n'en dépend pas non plus.

Exemple. Une transformation linéaire est donnée par les relations

$$x_1' = x_1 + 2x_2,$$
$$x_2' = 3x_1 + 4x_2$$

dans la base e_1, e_2. Trouver les formules définissant cette transformation dans la base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, étant donné que

$$\tilde{e}_1 = 11e_1 + 7e_2,$$
$$\tilde{e}_2 = 3e_1 + 2e_2.$$

Solution. On a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vu que $\operatorname{Det} L = 1 \neq 0$, il existe

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Selon la formule (5)

$$\tilde{A} = L^{-1}AL = \begin{pmatrix} -133 & -38 \\ 496 & 138 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la transformation linéaire envisagée est donnée dans la nouvelle base par:

$$\tilde{x}_1' = -133\tilde{x}_1 - 38\tilde{x}_2,$$
$$\tilde{x}_2' = 496\tilde{x}_1 + 138\tilde{x}_2.$$

§ 19. Notation matricielle d'un système de deux équations linéaires

94. Les opérations sur les matrices examinées aux paragraphes précédents trouvent leur application dans la résolution des systèmes d'équations linéaires.

Soit le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= h_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Formons la matrice des coefficients des inconnues:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Conformément au n°.91, le système (1) peut s'écrire comme suit:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Notons le couple d'inconnues par la lettre X et celui des nombres h_1, h_2 par la lettre H: $X = \{x_1; x_2\}$, $H = \{h_1; h_2\}$. Le système (1) s'écrit sous la forme condensée:

$$AX = H. \tag{3}$$

La relation (3) est appelée *notation matricielle du système donné.*

Si Det $A \neq 0$, la matrice A admet un inverse; dans ce cas

$$X = A^{-1}H. \tag{4}$$

La formule (4) exprime le couple d'inconnues en fonction des quantités données. On appelle cette formule *notation matricielle de la solution.* Pour calculer la solution d'après la formule (4) il faut: 1) former la matrice A^{-1} (voir n° 83), 2) multiplier la matrice carrée A^{-1} par la matrice colonne H (voir n° 91).

95. La notation matricielle s'avère d'un grand intérêt pratique dans les problèmes où l'on a à résoudre à plusieurs reprises un système d'équations ayant les mêmes coefficients aux premiers membres mais avec des seconds membres différents. Dans de tels problèmes il suffit de déterminer une fois pour toutes la matrice inverse pour trouver ensuite les inconnues, d'après les formules établies, en fonction des seconds membres du système. L'intérêt de cette méthode est évident surtout dans les problèmes se ramenant à des systèmes linéaires à grand nombre d'inconnues.

96. Exemple. Soit le système

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= h_1, \\ 3x_1 + 2x_2 &= h_2. \end{aligned}$$

Exprimer les inconnues x_1, x_2 en fonction de h_1, h_2.

Solution. On a

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Det $A = 1 \neq 0$. La matrice A est régulière et donc admet un inverse. Conformément au n° 83 on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix};$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{aligned} x_1 &= 2h_1 - 3h_2, \\ x_2 &= -3h_1 + 5h_2. \end{aligned}$$

§ 20. Transformation linéaire dans l'espace et matrices carrées du troisième ordre

Dans ce paragraphe sont données les notions essentielles sur les transformations linéaires dans l'espace. Les sous-divisions de ce paragraphe sont numérotées et sous-titrées pour permettre d'établir facilement une correspondance avec les questions analogues traitées précédemment dans le plan avec suffisamment de détails.

97. Notion de transformation linéaire dans l'espace. Formules de définition. Fixons un point O dans l'espace; tout vecteur x sera supposé appliqué en ce point O et considéré comme rayon vecteur d'un point M: $x = \overrightarrow{OM}$. On dit que dans l'espace est définie une *transformation ponctuelle* si est indiquée une loi qui à tout point M associe un point M' (autrement dit, M est amené en M'). Le point O est supposé comme toujours invariant. Outre la transformation ponctuelle, on définit la *transformation vectorielle* qui fait correspondre à tout vecteur $x = \overrightarrow{OM}$ un vecteur $x' = \overrightarrow{OM'}$. Nous appellerons x' *image* du vecteur x et nous écrirons $x' = Ax$.

La transformation $x' = Ax$ est dite linéaire si 1) $A(\lambda x) = \lambda Ax$, *où x est un vecteur quelconque de l'espace et λ un nombre quelconque*; 2) $A(x + y) = Ax + Ay$, où x, y *sont deux vecteurs quelconques.*

Prenons dans l'espace une base e_1, e_2, e_3 (on peut prendre pour e_1, e_2, e_3 des vecteurs quelconques pourvu qu'ils ne soient pas coplanaires). Tout vecteur x peut être alors décomposé suivant la base choisie:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

Nous appellerons les coefficients de ce développement *coordonnées du vecteur* x et nous écrirons $x = \{x_1; x_2; x_3\}$. Ces mêmes coefficients seront dits *coordonnées du point* M si $x = \overrightarrow{OM}$ (cette notation signifie que nous avons pris le point O pour origine des coordonnées).

Soit une transformation linéaire $x' = Ax$. Supposons données les images des vecteurs de base $e_1' = Ae_1$, $e_2' = Ae_2$, $e_3' = Ae_3$, c'est-à-dire que sont connues leurs composantes dans la base e_1, e_2, e_3:

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3, \\ e_2' &= Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3, \\ e_3' &= Ae_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Il est aisé de montrer que la donnée des formules (1) définit la transformation linéaire $x' = Ax$. Soient $x = \{x_1; x_2; x_3\}$ un vecteur arbitraire, $x' = \{x'_1; x'_2; x'_3\}$ son image (les coordonnées de ces vecteurs se rapportent à la base e_1, e_2, e_3). On a

$$\begin{aligned} x' = x'_1e_1 + x'_2e_2 + x'_3e_3 = Ax = A(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = \\ = A(x_1e_1) + A(x_2e_2) + A(x_3e_3) = \\ = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + x_3Ae_3 = \\ = x_1e'_1 + x_2e'_2 + x_3e'_3. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$x' = x'_1e_1 + x'_2e_2 + x'_3e_3 = x_1e'_1 + x_2e'_2 + x_3e'_3. \tag{2}$$

Substituons aux vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 de l'égalité (2) leurs composantes (1) et groupons les termes semblables; il vient:

$$\begin{aligned} x' = x'_1e_1 + x'_2e_2 + x'_3e_3 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,e_1 + \\ + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,e_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\,e_3. \end{aligned}$$

D'où, en comparant les coefficients des vecteurs de base de même indice, on déduit

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Les formules (3) permettent de trouver l'image $x' = \{x'_1; x'_2; x'_3\}$ de n'importe quel vecteur $x = \{x_1; x_2; x_3\}$ donné; les coefficients de ces formules sont définis par la donnée des formules (1). Ceci prouve que les formules (1) définissent effectivement la transformation linéaire $x' = Ax$ qui transforme les vecteurs de base e_1, e_2, e_3 en les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3. Autrement dit, *si l'on connaît les images des vecteurs de base par une transformation linéaire, on connaît les images de tous les vecteurs.* Les égalités (3) expriment linéairement les coordonnées du vecteur $x' = Ax$ en fonction de celles du vecteur x; nous les appellerons formules de définition de la transformation linéaire $x' = Ax$ dans la base donnée.

Désignons par A et nommons *matrice* de la transformation considérée, par rapport à la base donnée, le tableau des coefficients des seconds membres des égalités (3):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \tag{4}$$

les nombres $a_{11}, \ldots, a_{33}$ sont dits *éléments* de cette matrice. Les matrices du type (4) ont trois lignes et trois colonnes; on les appelle matrices carrées du troisième ordre.

La matrice des coefficients des formules (1) s'obtient par *transposition* de la matrice A, c'est-à-dire par permutation des éléments symétriques par rapport à la diagonale principale. La transposée de la matrice considérée sera marquée d'un astérisque. Conformément à ce qui vient d'être dit, la matrice des coefficients des formules (1) s'écrit ainsi :

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Notons encore que *toutes formules du type* (3) (c'est-à-dire à coefficients quelconques) *définissent une transformation linéaire.* La démonstration de cette proposition qui est parfaitement analogue à celle de la proposition correspondante concernant les transformations linéaires dans le plan (voir n° 63) ne sera pas pour cette raison démontrée ici.

Exemple. Soit (α) un plan quelconque passant par le point O. Faisons correspondre à un vecteur arbitraire $x = \overrightarrow{OM}$ un vecteur $x' = Ax = \overrightarrow{OM'}$ tel que : si P est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur (α), alors M' est situé sur la demi-droite PM, et $\frac{\overline{PM'}}{\overline{PM}} = k$ où k est un nombre positif donné. Montrer que la transformation considérée $x' = Ax$ est linéaire.

Solution. Choisissons comme vecteurs de base les vecteurs i, j, k deux à deux perpendiculaires; prenons les vecteurs i, j dans le plan (α). Alors, si $x = \{x_1; x_2; x_3\}$, $x' = \{x'_1; x'_2; x'_3\}$, on a

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = kx_3. \tag{6}$$

Les formules obtenues sont de la forme (3), elles définissent donc une transformation linéaire. Dans ce cas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}. \tag{7}$$

La transformation linéaire (6) est nommée *contraction* par rapport au plan (α) (dans lequel sont situés les deux premiers axes de

coordonnées); le nombre k s'appelle *rapport de contraction*, la matrice (7), *matrice de contraction* (par rapport au même plan).

98. Produit de transformations linéaires dans l'espace. Produit de matrices carrées du troisième ordre. Soient deux matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Prenons une base quelconque e_1, e_2, e_3 et envisageons les transformations linéaires Ax et Bx dont A et B sont respectivement les matrices par rapport à cette base.

Soit $x = \{x_1; x_2; x_3\}$ un vecteur arbitraire. La transformation de matrice B le transforme en un vecteur $y = Bx = \{y_1; y_2; y_3\}$, lequel sera transformé à son tour, par l'autre transformation donnée, A, en un vecteur $x' = Ay = \{x'_1; x'_2; x'_3\}$. Ainsi, à tout vecteur x est associé un vecteur x', c'est-à-dire qu'on a défini une transformation vectorielle. Cette transformation se note ABx et s'appelle *produit* de deux transformations:

$$ABx = A\,(Bx).$$

En raisonnant comme au § 3 on montrerait que le produit de deux transformations linéaires est également une transformation linéaire, il est aussi facile de trouver sa matrice.

La matrice de la transformation ABx est dite *produit* des matrices A, B et se note AB. Le produit AB peut être calculé directement à partir des matrices A et B d'après la règle suivante:

$$AB= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Analysons la règle de multiplication des matrices donnée par l'égalité (8). A cet effet considérons l'élément du produit situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la k-ième colonne; conformément à (8), cet élément s'écrit: $a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k}$. Dans ce produit figurent les éléments a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} composant la i-ième ligne de la matrice A et les éléments b_{1k}, b_{2k}, b_{3k} formant la k-ième colonne de la matrice B. La somme $a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + + a_{i3}b_{3k}$ est le produit de la i-ième ligne de la matrice A par

la k-ième colonne de la matrice B. Ainsi donc, pour obtenir l'élément du produit AB situé à l'intersection de la i-ième ligne avec la k-ième colonne ($i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$), il y a lieu de multiplier la i-ième ligne de la matrice A par la k-ième colonne de la matrice B.

Les propriétés des produits de matrices du troisième ordre sont analogues à celles des produits de matrices du second ordre et nous n'avons pas à nous attarder sur leur exposé. De même que dans le cas des matrices du second ordre, on définit la somme des matrices du troisième ordre et leur multiplication par un scalaire.

Exemple. Soient Ax une contraction de rapport k_1 relativement au plan Ox_2x_3, Bx une contraction de rapport k_2 relativement au plan Ox_1x_3 et Cx une contraction de rapport k_3 relativement au plan Ox_1x_2 (voir exemple du n° 97). Les matrices de ces transformations sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

En faisant le produit de A, B, C on trouve

$$ABC = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Une matrice de ce type est dite *diagonale*. Ainsi, *une matrice diagonale du troisième ordre correspond au produit de trois contractions par rapport aux plans de coordonnées.*

99. Théorème du déterminant du produit de deux matrices. De même que les matrices du second ordre, les matrices du troisième ordre vérifient l'égalité

$$\text{Det } AB = \text{Det } A \cdot \text{Det } B. \tag{9}$$

Remarquons que cette égalité se généralise tout naturellement à des matrices d'ordre quelconque. La démonstration de l'égalité (9) est en principe analogue à celle du § 14, avec, évidemment, des calculs plus encombrants.

100. Signification géométrique du déterminant d'une transformation linéaire dans l'espace. Transformations singulières dans l'espace. Nous allons tout d'abord trouver l'expression du produit mixte de trois vecteurs x, y, z donnés

par leurs composantes par rapport à une base arbitraire e_1, e_2, e_3 :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \\ y &= y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3, \\ z &= z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Faisons d'abord le produit vectoriel des vecteurs x et y :

$$[xy] = (x_2y_3 - x_3y_2)\,[e_2e_3] + \\ + (x_3y_1 - x_1y_3)\,[e_3e_1] + (x_1y_2 - x_2y_1)\,[e_1e_2]. \tag{11}$$

Multiplions ensuite scalairement les deux membres de l'égalité (11) par les deux membres de la dernière égalité (10), il vient

$$(xyz) = \{(x_2y_3 - x_3y_2)\,z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,z_2 + \\ + (x_1y_2 - x_2y_1)\,z_3\}\,(e_1e_2e_3), \tag{12}$$

où xyz est le produit mixte des vecteurs x, y, z ; e_1, e_2, e_3 le produit mixte des vecteurs de base. Supposons pour fixer les idées que le trièdre e_1, e_2, e_3 soit direct et que le produit vectoriel soit fait à droite. Le produit mixte $e_1e_2e_3$ est alors une quantité positive égale au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs e_1, e_2, e_3 ; en désignant ce volume par V_0, on a $e_1e_2e_3 = V_0$.

Le produit mixte xyz est égal au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs x, y, z, pris avec le signe plus si le système de vecteurs x, y, z est direct et avec le signe moins si ce système est rétrograde. Convenons d'appeler le produit mixte xyz volume orienté du parallélépipède construit sur les vecteurs x, y, z ; convenons de noter ce produit par τ ; on a $xyz = \tau$. Notons enfin que l'accolade de l'égalité (12) contient, sous forme développée, le déterminant composé des coordonnées des vecteurs x, y, z. En vertu de ce qui précède, on a la formule

$$\tau = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} V_0. \tag{13}$$

Soit une transformation quelconque $x' = Ax$ dans l'espace. Soient x', y', z' les images des vecteurs x, y, z par la transformation envisagée, τ' le volume orienté du parallélépipède construit sur les vecteurs x', y', z'. Par analogie avec (13) on a l'égalité

$$\tau' = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix} V_0. \tag{14}$$

Ici le déterminant est composé des coordonnées des vecteurs x', y', z'. D'autre part, si la matrice de la transformation est désignée de façon usuelle (comme dans l'égalité (4)), on a

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$
$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3,$$
$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3,$$
$$y_3' = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3,$$
$$z_1' = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3,$$
$$z_2' = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}z_3,$$
$$z_3' = a_{31}z_1 + a_{32}z_2 + a_{33}z_3.$$

En se servant de la règle de multiplication des matrices, on peut grouper ces neuf égalités en une seule égalité matricielle:

$$\begin{pmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

D'où, en vertu du théorème du déterminant du produit des matrices, on déduit

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{vmatrix} = \operatorname{Det} A \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par V_0; alors en vertu de (13) et (14) on obtient la relation cherchée:

$$\tau' = \tau \cdot \operatorname{Det} A. \tag{15}$$

La conclusion que l'on tire de (15) est la suivante: *une transformation linéaire dans l'espace transforme un parallélépipède en un parallélépipède de telle sorte que leurs volumes orientés soient proportionnels; le coefficient de proportionnalité est égal au déterminant de la transformation.* La formule (15) fait apparaître également ceci: si $\operatorname{Det} A > 0$, le système de vecteurs x, y, z et celui de leurs images sont de même orientation (τ et τ' sont de même signe); si $\operatorname{Det} A < 0$, les systèmes x, y, z et x', y', z' sont d'orientation opposée.

Considérons maintenant une transformation linéaire $x' = Ax$ telle que Det $A = 0$. Dans ce cas, selon la formule (15) $\tau' = 0$ quel que soit τ. Ceci veut dire que la transformation envisagée transforme tout système de vecteurs x, y, z en trois vecteurs coplanaires e_1, e_2, e_3. En particulier, sont coplanaires les images e_1', e_2', e_3' des vecteurs de base e_1, e_2, e_3. Désignons par (α') le plan passant par le point O et contenant les vecteurs e_1', e_2', e_3'. Conformément à la formule (2), l'image $x' = Ax$ de n'importe quel vecteur $x = \{x_1; x_2; x_3\}$ peut être exprimée sous la forme

$$x' = x_1e_1' + x_2e_2' + x_3e_3'.$$

On en déduit que si Det $A = 0$, les images de tous les vecteurs de l'espace sont contenues dans le même plan (α'). On peut dire également que les images de tous les points de l'espace sont contenues dans un même plan, c'est-à-dire que tout l'espace est appliqué dans un plan. Une telle transformation de l'espace est dite *singulière*. Conformément à ce qui précède, *une transformation linéaire singulière se caractérise par la condition* Det $A = 0$. Sous cette condition la matrice A s'appelle *singulière* elle aussi.

Exemple. La transformation linéaire

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ x_2' &= 3x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x_3' &= 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

est singulière car les images de tous les points de l'espace appartiennent au plan $(x_1' + x_2' - x_3' = 0)$. En même temps

$$\text{Det}\, A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

101. Inversion d'une transformation linéaire dans l'espace. Soit dans l'espace une transformation linéaire $x' = Ax$; ici x' est l'*image* du vecteur x, x est l'*antécédent* du vecteur x'. La transformation qui fait correspondre à tout vecteur arbitraire x' son antécédent x est dite transformation inverse et se note $x = A^{-1}x'$. Occupons-nous du problème qui consiste à trouver l'inverse d'une transformation donnée.

Supposons que la transformation envisagée $x' = Ax$ soit singulière; cette hypothèse entraîne que les images de tous les vecteurs de l'espace sont contenues dans un même plan (α'). Pour tout vecteur x' non situé dans ce plan il n'existe pas d'antécédent, donc *une transformation singulière n'admet pas d'inverse.*

Soit maintenant $x' = Ax$ une transformation linéaire régulière définie par

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

dans la base e_1, e_2, e_3 et

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

sa matrice. La transformation étant régulière, on a $\Delta = \operatorname{Det} A \neq 0$. Pour obtenir la transformation inverse de la transformation donnée, il y a lieu d'exprimer les coordonnées de l'antécédent $\{x_1; x_2; x_3\}$ en fonction des coordonnées de l'image $\{x_1'; x_2'; x_3'\}$, c'est-à-dire de résoudre le système (16) par rapport à x_1, x_2, x_3 en supposant x_1', x_2', x_3' connus. Comme $\Delta \neq 0$, on trouve (voir le « Cours », Appendice, § 5) :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1' & a_{12} & a_{13} \\ x_2' & a_{22} & a_{23} \\ x_3' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x_1' & a_{13} \\ a_{21} & x_2' & a_{23} \\ a_{31} & x_3' & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1' \\ a_{21} & a_{22} & x_2' \\ a_{31} & a_{32} & x_3' \end{vmatrix}}{\Delta}. \tag{17}$$

Nous désignons par A_{ik} le cofacteur de l'élément a_{ik} du déterminant de la matrice A. Examinons le premier des déterminants écrits ci-dessus. En développant ce déterminant suivant les éléments de la première colonne, on trouve

$$\begin{vmatrix} x_1' & a_{12} & a_{13} \\ x_2' & a_{22} & a_{23} \\ x_3' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11}x_1' + A_{21}x_2' + A_{31}x_3'. \tag{18}$$

En effet, x_1', x_2', x_3' occupent la place des éléments a_{11}, a_{21}, a_{31} du déterminant de la matrice A, donc dans le développement du déterminant (18) suivant les éléments de la première colonne les nombres x_1', x_2', x_3' doivent être multipliés par les cofacteurs A_{11}, A_{21}, A_{31}. En développant d'une manière analogue les deux autres déterminants des formules (17), on met ces dernières sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_{11}}{\Delta}x_1' + \frac{A_{21}}{\Delta}x_2' + \frac{A_{31}}{\Delta}x_3', \\ x_2 &= \frac{A_{12}}{\Delta}x_1' + \frac{A_{22}}{\Delta}x_2' + \frac{A_{32}}{\Delta}x_3', \\ x_3 &= \frac{A_{13}}{\Delta}x_1' + \frac{A_{23}}{\Delta}x_2' + \frac{A_{33}}{\Delta}x_3'. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Nous avons obtenu les formules donnant la transformation $x = A^{-1}x'$ inverse de la transformation linéaire $x' = Ax$ dans la même base e_1, e_2, e_3. Les expressions (19) étant linéaires, *la transformation inverse l'est également.* On appelle *inverse* de la matrice donnée A et on note A^{-1} la matrice de la transformation $x = A^{-1}x'$. A partir de (19) on trouve:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

De même que dans le plan, on considère dans l'espace la *transformation identique* que l'on écrit dans n'importe quelle base comme suit: $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$. La matrice de la transformation identique se note E et s'appelle *matrice unité*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a les égalités:

$$A^{-1}A = E, \quad AA^{-1} = E. \tag{21}$$

En outre, pour toute matrice A on a

$$AE = A, \quad EA = A. \tag{22}$$

Pour démontrer les égalités (21), (22) il suffit de reprendre les raisonnements des n^{os} 85 et 86.

102. Transformation des coordonnées d'un vecteur dans un changement de base. Supposons que l'on passe de la base e_1, e_2, e_3 à une nouvelle base

$$\left.\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= l_{11}e_1 + l_{21}e_2 + l_{31}e_3, \\ \tilde{e}_2 &= l_{12}e_1 + l_{22}e_2 + l_{32}e_3, \\ \tilde{e}_3 &= l_{13}e_1 + l_{23}e_2 + l_{33}e_3. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

La matrice des coefficients de ces développements sera supposée connue et désignée par L^*. Les vecteurs de base (anciens comme nouveaux) étant non coplanaires, Det $L^* \neq 0$. (Ceci découle du fait que le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$) est non nul, voir formule (13) du n° 100.)

Soit un vecteur arbitraire x de coordonnées x_1, x_2, x_3 dans la base e_1, e_2, e_3; dans la nouvelle base $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$, ce même vecteur

x aura pour coordonnées $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_3$. Entre les anciennes et les nouvelles coordonnées du vecteur x existent les relations

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}\widetilde{x}_1 + l_{12}\widetilde{x}_2 + l_{13}\widetilde{x}_3, \\ x_2 &= l_{21}\widetilde{x}_1 + l_{22}\widetilde{x}_2 + l_{23}\widetilde{x}_3, \\ x_3 &= l_{31}\widetilde{x}_1 + l_{32}\widetilde{x}_2 + l_{33}\widetilde{x}_3. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Les formules (24) sont analogues aux formules (4) du n° 88 et se démontrent comme ces dernières. La matrice des coefficients des formules (24) sera désignée par L (L^* est sa transposée). Introduisons l'opération de multiplication de la matrice carrée du troisième ordre par la matrice colonne (composée de trois éléments); le principe de cette opération ne diffère en rien de celui de l'opération analogue introduite au n° 91. Les trois égalités (24) se remplacent alors par une seule égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \widetilde{x}_3 \end{pmatrix}.$$

Convenons de désigner le triplet $\{x_1, x_2, x_3\}$ par la lettre X et le triplet $\{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3\}$ par la lettre $\widetilde{X}$. Avec ces notations les égalités (24) acquièrent la forme suivante:

$$X = L\widetilde{X}. \tag{25}$$

Les formules inverses (exprimant les nouvelles coordonnées d'un vecteur par les anciennes) se ramèneront à l'égalité matricielle

$$\widetilde{X} = L^{-1}X. \tag{26}$$

La matrice L^{-1} existe puisque Det L = Det $L^* \neq 0$.

103. Transformation de coordonnées rectangulaires. Matrice orthogonale du troisième ordre. Considérons le cas particulier d'une transformation de coordonnées où 1) les anciens vecteurs de base i, j, k sont des vecteurs unitaires deux à deux perpendiculaires; 2) la nouvelle base $\widetilde{i}$, $\widetilde{j}$, $\widetilde{k}$ est comme l'ancienne. Dans ce cas nous changerons les notations des coefficients des formules (23) et écrirons celles-ci comme suit:

$$\begin{aligned} \widetilde{i} &= l_1 i + m_1 j + n_1 k, \\ \widetilde{j} &= l_2 i + m_2 j + n_2 k, \\ \widetilde{k} &= l_3 i + m_3 j + n_3 k; \end{aligned}$$

et

$$L^* = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_2 & n_3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}.$$

Comme $\widetilde{i}^2 = 1$, $\widetilde{j}^2 = 1$, $\widetilde{k}^2 = 1$, $\widetilde{i}\widetilde{j} = 0$, $\widetilde{i}\widetilde{k} = 0$, $\widetilde{j}k = 0$, alors

$$\left.\begin{array}{ll} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, & l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, & l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0, \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, & l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0. \end{array}\right\} \qquad (27)$$

En vertu de ces égalités on a

$$L^* L = E; \qquad (28)$$

inversement, la formule (27) découle de (28). La matrice L vérifiant la condition (28) est dite *orthogonale*. On déduit également de (28) que

$$L^* = L^{-1}, \qquad (29)$$

c'est-à-dire que *l'inverse d'une matrice orthogonale coïncide avec sa transposée*. On conclut donc de ce qui précède qu'en passant d'une base i, j, k à une base analogue $\widetilde{i}$, $\widetilde{j}$, $\widetilde{k}$ on obtient des formules de transformation de coordonnées avec une matrice orthogonale. En notation matricielle, les formules des transformations directe et inverse des coordonnées s'écrivent

$$X = L\widetilde{X}, \qquad \widetilde{X} = L^* X \qquad (30)$$

(voir formules (25), (26) du n° 102 et formule (29)). Il est très instructif de comparer les formules (30) avec les formules (7) et (9) du § 6.

Notons encore qu'en vertu de (28)

$$\text{Det } L^* \cdot \text{Det } L = 1;$$

mais Det L^* = Det L, par conséquent, (Det L)^2 = 1 et

$$\text{Det } L = \pm 1.$$

Ainsi, le déterminant d'une matrice orthogonale ne peut être égal qu'à $+1$ ou -1. Dans le premier cas les bases i, j, k et $\widetilde{i}$, $\widetilde{j}$, $\widetilde{k}$ sont de même orientation, dans de second, d'orientation contraire (voir formule (13) du n° 100 ainsi que le § 6).

104. Changement de la matrice d'une transformation linéaire dans l'espace par passage à une nouvelle base. Soit $x' = Ax$ une transformation linéaire dans l'espace. Si l'on se donne une base

e_1, e_2, e_3 la transformation linéaire considérée est définie par des formules dont les coefficients sont les éléments de la matrice A. Supposons que l'on passe de la base e_1, e_2, e_3 à une nouvelle base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ moyennant les formules (23) du n° 102. Dans cette nouvelle base la transformation envisagée aura une matrice $\tilde{A}$, telle que

$$\tilde{A} = L^{-1}AL. \tag{31}$$

La déduction de la formule (31) étant parfaitement analogue à celle de la formule correspondante dans le cas des transformations linéaires dans le plan (voir § 18), nous n'allons pas la reproduire ici.

Notons que la formule matricielle (31) entraîne l'égalité numérique

$$\operatorname{Det} \tilde{A} = \operatorname{Det} A,$$

c'est-à-dire que le déterminant de la matrice d'une transformation linéaire est invariant par rapport à la base. En fait, ce résultat a déjà été établi au n° 100, où on a montré que le déterminant d'une transformation linéaire exprimait le rapport de volumes; les volumes des corps ne dépendant pas du choix de coordonnées, le déterminant en question ne peut pas en dépendre non plus.

Exemple. Soit une transformation linéaire définie dans la base e_1, e_2, e_3 par les relations:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2, \\ x_2' &= x_1 \qquad + x_3, \\ x_3' &= x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Etablir les relations définissant cette transformation dans la base:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= e_1 + 2e_2 + e_3, \\ \tilde{e}_2 &= 2e_1 + e_2 + 3e_3, \\ \tilde{e}_3 &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Solution. On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la formule (20) à la matrice L, on trouve

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$L^{-1}A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix};$$

ensuite

$$L^{-1}AL=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, dans cette nouvelle base la transformation linéaire donnée s'exprime par les formules

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1' &= -\tilde{x}_1+3\tilde{x}_2,\\ \tilde{x}_2' &= \tilde{x}_2,\\ \tilde{x}_3' &= 4\tilde{x}_1-2\tilde{x}_2+2\tilde{x}_3.\end{aligned}$$

105. Notation matricielle d'un système de trois équations linéaires. En conclusion de ce paragraphe nous allons montrer comment les méthodes matricielles s'appliquent aux systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues. L'exposé qui suit est analogue à celui du § 19.

Soit un système d'équations:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=h_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=h_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=h_3.\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Formons la matrice

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

et remplaçons les équations (32) par une seule égalité matricielle

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}.$$

Désignons par X le triplet d'inconnues et par H, le triplet des nombres h_1, h_2, h_3. La relation précédente se met alors sous la forme

$$AX=H. \qquad (33)$$

L'égalité (33) s'appelle *notation matricielle du système donné.*

Si Det $A \neq 0$, la matrice A admet un inverse; dans ce cas

$$X = A^{-1}H. \tag{34}$$

La formule (34) exprimant les inconnues en fonction des quantités données est dite *notation matricielle de la solution.*

Exemple. On donne le système

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= h_1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= h_2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= h_3. \end{aligned}$$

Exprimer les x_1, x_2, x_3 en fonction des h_1, h_2, h_3.

Solution. On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det $A = 1 \neq 0$. La matrice A est régulière et donc admet un inverse. Conformément au n° 101 on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{aligned} x_1 &= -2h_1 + h_2 + h_3, \\ x_2 &= -h_1 \quad\quad + h_3, \\ x_3 &= 5h_1 - h_2 - 3h_3. \end{aligned}$$

§ 21. Vecteurs propres d'une transformation linéaire

106. Soit une transformation linéaire $x' = Ax$. Le vecteur x (non nul) tel que

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

est dit *vecteur propre* de la transformation linéaire donnée; λ est un nombre qui s'appelle *valeur propre* du vecteur x. Selon cette

définition, un vecteur propre x d'une transformation est un vecteur qui se transforme en un vecteur colinéaire x' ; la valeur propre est le rapport des vecteurs x' et x (c'est-à-dire le coefficient dans l'égalité $x' = \lambda x$).

Notons le fait important suivant: *si x est vecteur propre d'une transformation, alors tout vecteur non nul, colinéaire à x, est aussi un vecteur propre de la transformation envisagée associé à la même valeur propre.* En effet, soit x^* colinéaire à x; étant donné que $x \neq 0$, il doit exister un nombre α tel que $x^* = \alpha x$. En vertu de la propriété connue des transformations linéaires on a $Ax^* = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) = \lambda x^*$. Ainsi, $Ax^* = \lambda x^*$, or, ceci signifie que x^* est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

107. Pour illustrer les notions de vecteur propre et de valeur propre considérons les transformations linéaires dans le plan que nous avons déjà vues dans les exemples du n° 60 du § 12 (elles sont envisagées ici dans le même ordre).

E x e m p l e 1. Ax est une homothétie de rapport k. Pour cette transformation chaque vecteur est vecteur propre; tous les vecteurs sont associés à une même valeur propre égale au rapport d'homothétie.

E x e m p l e 2. Ax est une rotation d'angle α. Si $0 < \alpha < \pi$, Ax n'a pas de vecteurs propres (tous les vecteurs tournent d'une façon telle qu'aucune image n'est située sur l'axe de son image réciproque). Si $\alpha = 0$, Ax est une transformation identique; dans ce cas chaque vecteur est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Si $\alpha = \pi$ alors $x' = Ax = -x$; dans cette transformation chaque vecteur est un vecteur propre associé à la valeur propre -1.

E x e m p l e 3. Ax est une symétrie par rapport à une droite (a). Les vecteurs propres de cette transformation sont: 1) les vecteurs situés sur la droite (a); ils sont associés à la valeur propre 1 ; 2) les vecteurs perpendiculaires à la droite (a); ils sont associés à la valeur propre -1.

E x e m p l e 4. Ax est une contraction de rapport k relativement à une droite (a). Les vecteurs propres sont: 1) les vecteurs portés par la droite (a) (associés à la valeur propre 1) ; 2) les vecteurs perpendiculaires à la droite (a) (associés à la valeur propre k).

108. Soit $x' = Ax$ une transformation linéaire dans le plan. Supposons qu'il existe deux vecteurs propres non colinéaires de cette transformation. Désignons par e_1, e_2 ces vecteurs et par λ_1, λ_2 les valeurs propres auxquelles ils sont associés. Les vecteurs

e_1, e_2 étant non colinéaires, on peut les prendre comme vecteurs de base. Ecrivons les formules définissant la transformation linéaire donnée, par rapport à la base e_1, e_2. Soient e_1', e_2' les images des vecteurs e_1, e_2; on a

$$e_1' = Ae_1 = \lambda_1 e_1,$$
$$e_2' = Ae_2 = \lambda_2 e_2.$$

D'où

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Evidemment, $A^* = A$, donc

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Donc, *si pour vecteurs de base on prend les vecteurs propres e_1, e_2 d'une transformation linéaire, la matrice A de cette transformation est diagonale*; la diagonale de la matrice A est formée des valeurs propres, disposées dans l'ordre de numération, auxquelles sont associés les vecteurs e_1, e_2. Dans la base e_1, e_2 la transformation linéaire considérée s'exprime par les formules

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1, \\ x_2' &= \lambda_2 x_2 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

En particulier, on peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2$. Comme il n'y a aucune raison de distinguer les nombres λ_1 et λ_2, nous les désignerons par λ. Les formules (3) deviennent alors

$$x_1' = \lambda x_1,$$
$$x_2' = \lambda x_2.$$

Ces formules définissent une *homothétie de rapport λ. Dans ce cas chaque vecteur du plan est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

109. Soit maintenant $x' = Ax$ une transformation linéaire dans l'espace. Supposons que cette transformation possède trois vecteurs propres non coplanaires: e_1, e_2, e_3 associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3.

En raisonnant comme précédemment on montrerait que si les vecteurs propres e_1, e_2, e_3 sont pris pour vecteurs de base, la matrice de la transformation linéaire considérée est diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \tag{4}$$

dans la base e_1, e_2, e_3 la transformation donnée s'exprime par

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1, \\ x_2' &= \lambda_2 x_2, \\ x_3' &= \lambda_3 x_3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

En particulier, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, les formules (5) s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1, \\ x_2' &= \lambda x_2, \\ x_3' &= \lambda x_3. \end{aligned}$$

Ces formules définissent dans l'espace une *homothétie de rapport* λ. *Dans ce cas, chaque vecteur de l'espace est un vecteur propre associé à la valeur propre* λ.

110. De l'exposé des deux n^{os} précédents ressort clairement le rôle important que jouent les vecteurs propres dans la théorie des transformations linéaires. Nous avons vu que s'il existe une base formée de vecteurs propres d'une transformation linéaire, celle-ci s'exprime dans cette base d'une façon particulièrement simple et est complètement définie par les valeurs propres auxquelles sont associés les vecteurs de base.

Les paragraphes qui suivent sont consacrés aux méthodes de recherche des vecteurs propres et des valeurs propres correspondantes.

§ 22. Equation caractéristique de la matrice d'une transformation linéaire

111. Considérons d'abord une transformation linéaire $x' = Ax$ dans le plan. Proposons-nous de trouver tous les vecteurs propres de cette transformation.

Prenons une base arbitraire e_1, e_2; soient

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

les relations définissant cette transformation par rapport à la base e_1, e_2 et

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

la matrice de cette transformation par rapport à la même base.

Soit $e = \{l; m\}$ un vecteur propre de la transformation linéaire en question et λ la valeur propre correspondante. Alors

$$Ae = \lambda e. \tag{3}$$

Cette égalité vectorielle peut s'écrire:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m &= \lambda l, \\ a_{21}l + a_{22}m &= \lambda m \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ou encore:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\, l + a_{12}m &= 0, \\ a_{21}l + (a_{22} - \lambda)\, m &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

puisque dans les égalités (5) au moins un des nombres l, m est non nul (car, par définition, le vecteur propre est non nul: $e = \{l; m\} \neq 0$). Nous avons montré que *toute valeur propre est racine de l'équation* (6). Inversement, admettons qu'un certain λ est racine de l'équation (6). Si alors on prend, dans le système (5), précisément cette valeur pour λ, le système aura une solution non nulle l, m (car le déterminant du système (5) est égal à zéro). Soit le vecteur $e = \{l; m\}$; les coordonnées de ce vecteur vérifiant les égalités (5), le vecteur e lui-même et les nombres λ vérifient la formule (3). Par conséquent, le vecteur e est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Nous pouvons formuler maintenant la règle suivante: *pour trouver tous les vecteurs propres d'une transformation linéaire donnée, il faut avant tout résoudre l'équation* (6); *chaque racine réelle λ de l'équation* (6) *est une valeur propre; les vecteurs propres associés à la valeur propre λ se déduisent à partir du système* (5).

L'équation (6) s'appelle *équation caractéristique* de la matrice de la transformation linéaire donnée.

Exemple. Trouver les vecteurs propres de la transformation

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

où $0 < \alpha < \pi$.

Solution. Formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le déterminant, nous obtenons

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha + 1 = 0.$$

D'où $\lambda_{1,2} = \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1}$. Comme $\cos^2 \alpha < 1$ (pour $0 < \alpha < \pi$), les racines de l'équation caractéristique sont des nombres complexes. L'équation caractéristique n'admettant pas de racines réelles, la transformation donnée n'a pas de vecteurs propres (ce qui se conçoit facilement si l'on remarque que les formules (*), en coordonnées rectangulaires, traduisent une rotation d'angle α ; voir exemple 2 du n° 104.)

Exemple. Trouver les vecteurs propres de la transformation

$$x_1' = x_1 + x_2,$$
$$x_2' = \quad x_2.$$

Solution. Formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

On en tire $(1 - \lambda)^2 = 0$ et $\lambda = 1$. Le système (5) prend dans ce cas la forme

$$(1 - \lambda)\, l + m = 0,$$
$$(1 - \lambda)\, m = 0.$$

En substituant dans ce système $\lambda = 1$, on trouve $m = 0$ (l étant quelconque). Ainsi, les vecteurs propres de la transformation donnée sont uniquement les vecteurs $\{l; 0\}$ portés par l'axe d'abscisses.

112. Soit maintenant $x' = Ax$ une transformation linéaire dans l'espace. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la matrice de cette transformation par rapport à une base e_1, e_2, e_3.

En raisonnant comme précédemment on montrerait que les valeurs propres de la transformation linéaire en question se définissent à partir de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Notamment, si λ est une racine réelle quelconque de l'équation (7), le système

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\,l+a_{12}m+a_{13}n&=0,\\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)\,m+a_{23}n&=0,\\ a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)\,n&=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

admet pour solution non nulle les nombres l, m, n; le vecteur $e=\{l;\ m;\ n\}$ est un vecteur propre de la transformation donnée associé à la valeur propre λ.

113. Si l'on développe le déterminant de l'équation caractéristique, on obtient un polynôme algébrique en λ. Ce polynôme est nommé *polynôme caractéristique* de la matrice de la transformation linéaire. Dans le cas de transformations linéaires dans le plan, le polynôme caractéristique est du second degré, pour les transformations linéaires dans l'espace il est du troisième degré.

Notons que le polynôme caractéristique est le déterminant de la matrice $A-\lambda E$. En effet, dans le cas de transformations linéaires dans le plan la matrice $A-\lambda E$ s'écrit:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\ 0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}-\lambda\end{pmatrix};$$

d'où le polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=\operatorname{Det}(A-\lambda E).$$

Il est clair que le polynôme caractéristique des transformations dans l'espace s'exprime de façon analogue.

114. On a le théorème important suivant:

T h é o r è m e. *Le polynôme caractéristique de la matrice d'une transformation linéaire est indépendant du choix de la base.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient A la matrice de la transformation linéaire considérée par rapport à une base e_1, e_2, $\widetilde{A}$ la matrice de cette transformation par rapport à une nouvelle base $\widetilde{e}_1$, $\widetilde{e}_2$; soit L la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle.

Conformément aux §§ 8 et 20 (n° 101),

$$\widetilde{A}=L^{-1}AL.$$

En outre, la matrice unité vérifie la relation

$$E=L^{-1}EL.$$

Les deux dernières égalités fournissent

$$\widetilde{A} - \lambda E = L^{-1}(A - \lambda E)\, L.$$

En vertu du théorème du déterminant du produit de matrices, cette égalité matricielle entraîne l'égalité numérique

$$\operatorname{Det}(\widetilde{A} - \lambda E) = \operatorname{Det} L^{-1} \cdot \operatorname{Det}(A - \lambda E) \cdot \operatorname{Det} L.$$

Or

$$\operatorname{Det} L^{-1} \cdot \operatorname{Det} L = \operatorname{Det} L^{-1}L = \operatorname{Det} E = 1.$$

Donc

$$\operatorname{Det}(\widetilde{A} - \lambda E) = \operatorname{Det}(A - \lambda E),$$

ce qu'il fallait démontrer.

115. Développons cette dernière identité, dont l'existence est affirmée par le théorème précédent, dans le cas des transformations linéaires dans le plan :

$$\begin{vmatrix} \widetilde{a}_{11} - \lambda & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Les $\widetilde{a}_{ik}$ sont ici les éléments de la matrice $\widetilde{A}$, les a_{ik} ceux de la matrice A, λ un nombre quelconque. En développant les déterminants on trouve

$$\lambda^2 - (\widetilde{a}_{11} + \widetilde{a}_{22})\lambda + (\widetilde{a}_{11}\widetilde{a}_{22} - \widetilde{a}_{12}\widetilde{a}_{21}) = \\ = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Cette relation étant une identité, c'est-à-dire une égalité vraie quel que soit λ, il vient

$$\widetilde{a}_{11} + \widetilde{a}_{22} = a_{11} + a_{22},$$
$$\widetilde{a}_{11}\widetilde{a}_{22} - \widetilde{a}_{12}\widetilde{a}_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ainsi, pour les transformations linéaires dans le plan, le théorème démontré signifie que *les quantités* $a_{11} + a_{22}$ et $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *sont les invariants de la matrice de passage*, c'est-à-dire qu'elles ne changent pas lorsqu'on passe à une nouvelle base. Remarquons que la quantité $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ n'est autre que le déterminant de la matrice A ; or son invariance a été déjà prouvée au § 18.

La matrice d'une transformation linéaire dans l'espace admet trois invariants ; on les trouve de façon analogue. Nous n'allons pas les écrire ici.

§ 23. Transformations linéaires symétriques. Diagonalisation de la matrice d'une transformation symétrique dans le plan

116. Nous avons montré au § 21 que la matrice d'une transformation linéaire se diagonalise si l'on choisit comme vecteurs de base des vecteurs propres de la transformation. Les formules définissant la transformation linéaire prennent une forme très simple dans la nouvelle base.

Cependant, toutes les transformations linéaires n'admettent pas une telle simplification de leur matrice et de leurs formules de définition. En effet, on connaît des transformations linéaires dans le plan qui ne possèdent aucun vecteur propre ; on en connaît d'autres, dont les vecteurs propres sont tous colinéaires (voir exemples au n° 111). Il est donc impossible de choisir comme vecteurs de base les vecteurs propres de telles transformations.

Dans ce qui suit nous allons étudier une classe spéciale de transformations linéaires, appelées *symétriques*. On les rencontre en algèbre, en géométrie, en mécanique. Les transformations symétriques possèdent toujours des vecteurs propres dont on peut former une base. En même temps, la matrice de toute transformation linéaire symétrique se diagonalise.

117. Soit $x' = Ax$ une transformation linéaire (dans le plan ou dans l'espace). Soient x, y deux vecteurs arbitraires, $x' = Ax$, $y' = Ay$ leurs images. La transformation considérée est *symétrique* si le produit scalaire xy' est égal au produit scalaire yx' :

$$xy' = yx'. \tag{1}$$

Autrement dit, *la transformation linéaire* $x' = Ax$ *est symétrique si*

$$xAy = yAx \tag{2}$$

quels que soient les vecteurs x, y.

118. Dans la suite, en étudiant des transformations symétriques, nous emploierons uniquement les bases composées de vecteurs unitaires deux à deux perpendiculaires :

1) dans le plan : $e_1 = i$, $e_2 = j$;

2) dans l'espace : $e_1 = i$, $e_2 = j$, $e_3 = k$.

De telles bases sont dites *orthogonales*.

119. Démontrons que *la matrice de toute transformation linéaire symétrique rapportée à une base orthogonale est symétrique* (c'est-à-dire que les éléments a_{ik} et a_{ki} de cette matrice sont identiques : $a_{ik} = a_{ki}$).

Nous allons démontrer cette proposition pour le cas des transformations symétriques dans le plan, pour éviter d'écrire des expressions encombrantes.

Décomposons les images des vecteurs de base:

$$\left.\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2, \\ Ae_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Multiplions scalairement les deux membres de la première de ces égalités par le vecteur e_2 et les deux membres de la seconde, par le vecteur e_1; tenant compte de ce que $e_1e_2 = 0$, $e_1e_1 = 1$, $e_2e_2 = 1$, on trouve

$$e_2Ae_1 = a_{21}, \quad e_1Ae_2 = a_{12}.$$

En vertu de la symétrie de la transformation, on a $e_2Ae_1 = e_1Ae_2$. D'où

$$a_{21} = a_{12},$$

ce qui traduit la symétrie de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

La réciproque est également vraie: *si dans une base orthogonale la matrice d'une transformation linéaire est symétrique, la transformation l'est aussi.*

Nous allons démontrer cette proposition dans le cas des transformations linéaires dans le plan.

Supposons que les expressions (3) sont telles que $a_{21} = a_{12}$. Soient x, y deux vecteurs arbitraires:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2, \quad y = y_1e_1 + y_2e_2.$$

En se servant des expressions (3) on trouve

$$\begin{aligned} Ax &= x_1Ae_1 + x_2Ae_2 = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\, e_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\, e_2, \\ Ay &= y_1Ae_1 + y_2Ae_2 = \\ &= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)\, e_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)\, e_2. \end{aligned}$$

Formons les produits scalaires de x par Ay et de y par Ax:

$$\begin{aligned} xAy &= x_1 (a_{11}y_1 + a_{12}y_2) + x_2 (a_{21}y_1 + a_{22}y_2) = \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2, \\ yAx &= y_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + y_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + a_{21}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2. \end{aligned}$$

Comme $a_{21} = a_{12}$, les égalités précédentes fournissent

$$xAy = yAx,$$

ce qui prouve la symétrie de la transformation.

120. On se propose maintenant de montrer que 1) *chaque transformation linéaire symétrique dans le plan admet au moins un couple de vecteurs propres deux à deux perpendiculaires*; 2) *chaque transformation linéaire symétrique dans l'espace admet au moins trois vecteurs propres deux à deux perpendiculaires.* En même temps on indiquera une méthode de recherche de tels couples et triplets de vecteurs propres.

Nous allons démontrer ce que nous nous sommes proposé pour le cas des transformations linéaires symétriques dans le plan.

121. Soit donnée, dans le plan, une transformation linéaire symétrique $x' = Ax$;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

est sa matrice par rapport à une base orthogonale e_1, e_2.

Formons l'équation caractéristique de la matrice A:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

La matrice A étant symétrique, on a $a_{21} = a_{12}$. L'équation (4) s'écrit donc comme suit:

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0.$$

Les racines de l'équation (4) sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 + 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{2}. \tag{5}$$

Notons que

$$(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0;$$

et donc les nombres λ_1, λ_2 sont réels. Ainsi, *les racines de l'équation caractéristique d'une matrice symétrique sont toutes réelles.*

Conformément au n° 114, pour chaque racine ($\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$) de l'équation caractéristique (4) on peut trouver un vecteur propre $a = \{l; m\}$ associé à la valeur propre λ; les coordonnées du vecteur $a = \{l; m\}$ se trouvent à partir du système d'équations

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\, l + a_{12}m = 0, \\ a_{21}l + (a_{22}-\lambda)\, m = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Convenons d'appeler *normée* une solution l, m du système (6) telle que $l^2 + m^2 = 1$; si l, m est une solution normée, alors $a = \{l; m\}$ est un vecteur unitaire. Nous désignerons par l_1; m_1 la solution normée du système (6) correspondant à $\lambda = \lambda_1$, de

même, sera désignée par l_2; m_2 la solution qui s'obtient pour $\lambda = \lambda_2$. Alors les $a_1 = \{l_1; m_1\}$ et $a_2 = \{l_2; m_2\}$ sont des vecteurs unitaires associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2.

122. Examinons le cas où les racines de l'équation caractéristique sont distinctes: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Montrons que dans ce cas les vecteurs a_1 et a_2 sont orthogonaux. Commençons par écrire les relations

$$Aa_1 = \lambda_1 a_1, \quad Aa_2 = \lambda_2 a_2, \tag{7}$$

qui expriment le fait que a_1 et a_2 sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Multiplions scalairement les deux membres de la première relation (7) par le vecteur a_2 et les deux membres de l'autre, par le vecteur a_1. On trouve

$$a_2 A a_1 = \lambda_1 a_1 a_2, \quad a_1 A a_2 = \lambda_2 a_1 a_2.$$

La symétrie de la transformation permet d'écrire

$$a_2 A a_1 = a_1 A a_2.$$

D'où et à partir des égalités précédentes

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, a_1 a_2 = 0. \tag{8}$$

Les racines λ_1 et λ_2 étant distinctes, il découle de (8) que $a_1 a_2 = 0$, ce qui prouve l'orthogonalité des vecteurs a_1 et a_2. Notre proposition est donc démontrée.

123. Discutons maintenant le cas d'une racine double de l'équation caractéristique (4): $\lambda_1 = \lambda_2$, notons-la λ. Il s'ensuit dans ce cas de la formule (5) que $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$ et

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}.$$

Mais alors $a_{11} - a_{22} = 0$, $a_{12} = 0$; donc $a_{11} = a_{22} = \lambda$ et la transformation en question est donnée par les formules $x_1' = \lambda x_1$, $x_2' = \lambda x_2$. Or, cette transformation est une homothétie de rapport λ. Si $x' = Ax$ est une homothétie, chaque vecteur est un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Tout couple de vecteurs orthogonaux non nuls a_1, a_2 peut être pris comme couple de vecteurs propres orthogonaux.

124. Ainsi, *toute transformation linéaire symétrique dans le plan admet un couple de vecteurs propres orthogonaux* a_1, a_2.

Lorsqu'on prend ces vecteurs pour vecteurs de base: $\tilde{e}_1 = a_1$, $\tilde{e}_2 = a_2$, la matrice de la transformation se diagonalise:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où λ_1, λ_2 sont les valeurs propres auxquelles sont associés les vecteurs a_1, a_2. On en déduit que *toute transformation linéaire symétrique dans le plan est le produit de deux contractions par rapport à deux directions perpendiculaires* (voir n° 17).

125. Indiquons maintenant comment choisir une base orthogonale à partir des vecteurs propres d'une transformation linéaire symétrique $x' = Ax$.

Soit A la matrice de la transformation donnée par rapport à une base orthogonale quelconque e_1, e_2. Il faut avant tout établir l'équation caractéristique de la matrice A et trouver ses racines $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ (les λ_1, λ_2 seront des nombres réels). On distinguera deux cas.

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Il y a lieu de poser alors dans le système (6) $\lambda \neq \lambda_1$ puis $\lambda = \lambda_2$ et de trouver dans les deux cas les solutions respectives normées l_1, m_1 et l_2, m_2 de ce système. Les vecteurs

$$a_1 = \{l_1; m_1\}, \quad a_2 = \{l_2; m_2\}$$

sont alors les vecteurs unitaires propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2; les vecteurs a_1 et a_2 seront obligatoirement orthogonaux. La base cherchée se définit d'une manière univoque comme $\tilde{e}_1 = a_1$, $\tilde{e}_2 = a_2$ (à la numération et au sens des vecteurs $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ près);

2) $\lambda_1 = \lambda_2$. Dans ce cas la transformation est une homothétie et on peut prendre comme vecteurs de base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ tout couple de vecteurs unitaires orthogonaux.

Lorsque l'on passe à une nouvelle base orthogonale $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, les coordonnées de tous les vecteurs du plan donné changent d'après les formules du § 17, où

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix};$$

La matrice L est orthogonale.

Exemple. On donne une transformation linéaire $x' = Ax$

$$x_1' = 6x_1 + 2x_2,$$
$$x_2' = 2x_1 + 3x_2$$

par rapport à une base orthogonale e_1, e_2. Diagonaliser cette matrice par passage à une nouvelle base orthogonale.

Solution. La matrice de la transformation donnée est symétrique:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

donc le problème posé peut être résolu d'après la marche indiquée plus haut. Etablissons l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

soit

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0.$$

Les racines de cette équation sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$. Les vecteurs propres correspondants se déduisent du système (6) du n° 121 ; dans le cas considéré le système a la forme

$$(6 - \lambda)\, l + 2m = 0,$$
$$2l + (3 - \lambda)\, m = 0.$$

En y posant $\lambda = \lambda_1 = 2$, on trouve

$$4l + 2m = 0,$$
$$2l + m = 0.$$

On peut prendre pour solution $l = 1$, $m = -2$. En normant cette solution, on trouve le vecteur unitaire propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$:

$$\tilde{e}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} ; \frac{-2}{\sqrt{5}} \right\}.$$

De même, on trouve le vecteur unitaire propre correspondant à la valeur propre $\lambda_2 = 7$:

$$\tilde{e}_2 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}} ; \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Lorsqu'on passe à cette nouvelle base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ les coordonnées de tous les vecteurs (et de tous les points) se transforment d'après les formules du § 17 de matrice

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix};$$

notamment

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}_2, \\ x_2 &= -\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}_2, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}x_2, \\ \tilde{x}_2 &= \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}x_2. \end{aligned}\right\}$$

Dans la base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ la matrice de la transformation linéaire donnée est de la forme

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix};$$

la transformation considérée est définie par les formules

$$\tilde{x}'_1 = 2\tilde{x}_1,$$
$$\tilde{x}'_2 = 7\tilde{x}_2.$$

Notons que si l'orientation des vecteurs $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ est sans importance, le problème se résout plus vite; en effet, il suffit de trouver $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$ puis d'écrire immédiatement $\tilde{A}$.

§ 24. Diagonalisation de la matrice d'une transformation linéaire symétrique dans l'espace

126. Soit $x' = Ax$ une transformation linéaire symétrique dans l'espace. Montrer qu'elle admet trois vecteurs propres mutuellement orthogonaux.

Choisissons une base orthogonale quelconque e_1, e_2, e_3. Les formules de changement de coordonnées par cette transformation possèdent une matrice symétrique A. Etablissons l'équation caractéristique de la matrice A. Les transformations symétriques, dans l'espace comme dans le plan, présentent cette particularité que les racines de l'équation caractéristique sont toutes réelles. Cependant, dans l'espace ce fait ne se démontre pas facilement et nous n'allons pas l'utiliser immédiatement. D'autre part, on démontre aisément que l'équation caractéristique de la matrice A admet au moins une racine réelle. En effet, l'équation caractéristique de la matrice d'une transformation linéaire dans l'espace est une équation du troisième degré, or toute équation du troisième degré à coefficients réels admet une racine réelle.

Pour s'en convaincre, écrivons une équation arbitraire du troisième degré $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Il est clair que pour des λ suffisamment grands en valeur absolue, le premier terme de cette équation sera beaucoup plus grand que tous les autres. Alors, si $Q > 0$ est un nombre suffisamment grand, pour $\lambda = -Q$ le premier membre de cette équation sera négatif et pour $\lambda = +Q$, positif. Lorsque λ croît de $-Q$ jusqu'à $+Q$, le premier membre de l'équation, en subissant une variation continue, changera de signe. Donc, pour un certain $\lambda = \lambda_1$ le premier membre devient nul, ce qui prouve l'existence d'une racine réelle λ.

Conformément au n° 112, à toute racine réelle λ de l'équation caractéristique correspond un vecteur propre de la transformation linéaire correspondante, associé à la valeur propre λ (on trouve ce vecteur en résolvant le système (8) du n° 112).

Nous déduisons de ce qui précède la conclusion importante suivante : *toute transformation linéaire dans l'espace admet au moins un vecteur propre.*

Dans ce qui suit, nous allons essentiellement utiliser la condition que la transformation linéaire donnée $x' = Ax$ est symétrique.

Nous avons démontré que la transformation donnée admet au moins un vecteur propre ; notons-le a_1. Soit λ_1 la valeur propre à laquelle est associé ce vecteur. Menons par l'origine des coordonnées un plan (α_1) perpendiculaire au vecteur a_1. Prenons dans le plan (α_1) un vecteur arbitraire x ; assurons-nous que son image $x' = Ax$ appartient également au plan (α_1). Pour établir ce fait remarquons que le produit scalaire $a_1x = 0$ (car le vecteur x est choisi dans le plan (α_1)). Calculons le produit scalaire a_1x'. On a

$$a_1x' = a_1Ax = xAa_1.$$

Cette dernière égalité est vraie puisque la transformation est symétrique. Etant donné que a_1 est un vecteur propre associé à sa valeur propre λ_1, on a $Aa_1 = \lambda_1a_1$; par conséquent

$$a_1x' = xAa_1 = x(\lambda_1a_1) = \lambda_1(a_1x) = 0.$$

On en déduit que x' est perpendiculaire à a_1, donc appartient au plan (α_1), ce qu'il fallait prouver.

En vertu de ce qui vient d'être démontré, on peut considérer la transformation $x' = Ax$ comme celle des vecteurs du plan (α_1), si pour x on prend uniquement les vecteurs de ce plan (car les images de ces vecteurs restent dans ce même plan). Or, conformément au § 23, toute transformation linéaire symétrique dans le plan admet un couple de vecteurs propres orthogonaux. Par conséquent, la transformation envisagée $x' = Ax$ en admet un dans le plan (α_1) ; désignons ces vecteurs par a_2, a_3. D'autre part, nous avons dans l'espace trois vecteurs propres a_1, a_2, a_3 deux à deux orthogonaux.

Nous avons donc montré que *toute transformation linéaire symétrique dans l'espace admet au moins trois vecteurs propres deux à deux orthogonaux.*

127. En supposant les vecteurs a_1, a_2, a_3 unitaires, nous allons les prendre comme nouvelle base orthogonale : $\tilde{e}_1 = a_1$, $\tilde{e}_2 = a_2$, $\tilde{e}_3 = a_3$. Dans cette nouvelle base, la matrice de la transformation

considérée se diagonalise

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

où λ_1, λ_2, λ_3 sont les valeurs propres auxquelles sont associés les vecteurs a_1, a_2, a_3. Nous en déduisons que *chaque transformation linéaire symétrique dans l'espace est le produit de trois contractions effectuées par rapport à trois directions deux à deux perpendiculaires* (voir n° 95). En particulier, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, la transformation est une homothétie (voir n° 109).

128. Ecrivons le polynôme caractéristique de la matrice $\widetilde{A}$:

$$\operatorname{Det}(\widetilde{A} - \lambda E) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3).$$

Il est clair que les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont racines de ce polynôme. Souvenons-nous du théorème du n° 114 selon lequel le polynôme caractéristique de la matrice d'une transformation linéaire ne dépend pas du choix de la base. Il découle de ce théorème que, dans n'importe quelle base, le polynôme caractéristique de la matrice d'une transformation symétrique donnée admet pour racines les nombres λ_1, λ_2, λ_3. Nous avons démontré par là même que *les racines de l'équation caractéristique de la matrice d'une transformation linéaire symétrique sont toutes réelles.*

129. Soient λ_1, λ_2, λ_3 les racines de l'équation caractéristique. Considérons les cas suivants.

1) Les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont tous distincts. Selon le n° 112, la transformation admet pour vecteurs propres les vecteurs a_1, a_2, a_3 correspondant aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3. Ces vecteurs sont obligatoirement deux à deux orthogonaux (voir n° 122). On peut supposer les vecteurs a_1, a_2, a_3 unitaires. Sous cette condition, le triplet de vecteurs a_1, a_2, a_3 est unique au signe près. En effet, aucun vecteur, sauf $\pm a_1$, ne peut être vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_1, car il ne saurait être perpendiculaire aux vecteurs a_2, a_3. De même, il n'existe pas d'autres vecteurs propres unitaires, sauf $\pm a_2$ et $\pm a_3$ associés aux valeurs propres λ_2 et λ_3.

2) Deux des nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont égaux ; supposons, par exemple, $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$. Désignons $\lambda_2 = \lambda_3$ par λ. Dans ce cas λ est racine double de l'équation caractéristique.

Montrons qu'*à la valeur propre* λ_1 *correspond, au signe près, le vecteur propre unitaire* a_1. Au contraire, *à la racine double* λ *correspond une infinité de vecteurs propres unitaires.* Notamment, tout vecteur perpendiculaire au vecteur a_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de la transformation linéaire donnée.

Pour démontrer cette proposition, revenons au n° 126 où nous avons montré que la transformation symétrique $x' = Ax$ admet un triplet de vecteurs propres deux à deux orthogonaux: notons-les a_1, a_2, a_3 (pour la commodité de l'exposé, nous allons les considérér unitaires). En se référant aux résultats des n^{os} 127 et 128 nous devons conclure que deux de ces trois vecteurs doivent correspondre dans le cas considéré à une même valeur propre λ ($\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$); supposons que ce soient les vecteurs a_2 et a_3. Le vecteur a_1 est associé alors à la valeur propre λ_1 ($\lambda_1 \neq \lambda$). Désignons par (α_1) le plan passant par l'origine des coordonnées et perpendiculaire au vecteur a_1. Le plan (α_1) contient les vecteurs a_2 et a_3. Nous avons montré au n° 126 que la transformation en question peut être considérée comme une transformation vectorielle dans (α_1). Or, une telle transformation est une homothétie (dans (α_1)) puisqu'elle admet deux vecteurs propres deux à deux perpendiculaires (a_2 et a_3) associés aux mêmes valeurs propres (voir n° 123). Par conséquent, tous les vecteurs de (α_1) sont vecteurs propres de la transformation donnée, associés à la même valeur propre λ.

Il reste à montrer qu'aucun vecteur, sauf $\pm a_1$, ne peut être un vecteur propre unitaire associé à la valeur λ_1 (λ_1 étant une racine simple de l'équation caractéristique). Ceci est clair, car tout vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 doit être perpendiculaire au plan (α_1) (rappelons-nous que (α_1) contient les vecteurs propres correspondant à la valeur propre λ et que $\lambda_1 \neq \lambda$). Il est également clair que le vecteur unitaire perpendiculaire à (α_1) est soit a_1, soit $-a_1$. La proposition avancée est entièrement démontrée.

3) Les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont tous égaux entre eux, c'est-à-dire que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ est racine triple de l'équation caractéristique.

Dans ce cas, la transformation considérée est une homothétie, dans l'espace, de rapport λ (voir n° 127). On en déduit que tout vecteur de l'espace est un vecteur propre, associé à la valeur λ (voir n° 109).

130. D'après ce qui précède la marche à suivre pour trouver une base orthogonale constituée de vecteurs propres d'une transformation linéaire symétrique dans l'espace est la suivante.

Soient $x' = Ax$ une transformation symétrique dans l'espace et

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

sa matrice par rapport à une base orthogonale quelconque e_1, e_2 e_3 (A est symétrique, c'est-à-dire que $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$).

On commence par établir l'équation caractéristique de la matrice A :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

dont on détermine ensuite les racines $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ (les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont tous réels).

Conformément au n° 112, chaque racine λ ($\lambda = \lambda_1$, λ_2, λ_3) de l'équation caractéristique est une valeur propre à laquelle est associé un vecteur propre $a = \{l; m; n\}$; les coordonnées du vecteur $a = \{l; m; n\}$ sont données par le système suivant d'équations

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\, l + a_{12}m + a_{13}n &= 0, \\ a_{21}l + (a_{22}-\lambda)\, m + a_{23}n &= 0, \\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33}-\lambda)\, n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(si λ est racine de l'équation (1), alors l ; m ; n est *à priori* une solution non nulle du système (2)).

Il ne reste qu'à trouver les solutions du système (2) correspondant à $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$.

Une solution l ; m ; n du système (2) est dite *normée* si $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Si l, m, n est une solution normée, alors $a = \{l; m; n\}$ est un vecteur unitaire. Dans ce qui suit nous allons désigner par l_1, m_1, n_1 la solution normée du système (2) correspondant à $\lambda = \lambda_1$; on désignera de même par l_2, m_2, n_2 et l_3, m_3, n_3 les solutions normées correspondant à $\lambda = \lambda_2$ et $\lambda = \lambda_3$. Les vecteurs

$$a_1 = \{l_1; m_1; n_1\},\ a_2 = \{l_2; m_2; n_2\},\ a_3 = \{l_3; m_3; n_3\}$$

sont alors des vecteurs unitaires associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3.

Trois cas sont à considérer :

1) Les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont distincts. Dans ce cas les vecteurs a_1, a_2, a_3 sont obligatoirement perpendiculaires deux à

deux; le triplet de vecteurs a_1, a_2, a_3 est unique au signe près (voir n° 129). La base cherchée est donc $\tilde{e}_1 = a_1$, $\tilde{e}_2 = a_2$, $\tilde{e}_3 = a_3$.

2) Deux des nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont égaux, par exemple, $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$.

Selon le n° 129, il correspond dans ce cas au nombre $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$ une infinité de vecteurs propres unitaires situés tous dans un même plan. Par conséquent, en faisant dans le système (2) $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$, on s'aperçoit que ce dernier présente une seule équation essentielle (les deux autres lui sont proportionnelles). Supposons que ce soit l'équation

$$(a_{11} - \lambda)\, l + a_{12}m + a_{13}n = 0; \qquad (3)$$

lorsqu'on dit que l'équation (3) est essentielle, on veut dire par là que ce n'est pas une identité, c'est-à-dire que ses coefficients $a_{11} - \lambda$, a_{12}, a_{13} ne sont pas tous nuls.

Toute solution non nulle $\{l, m, n\}$ de l'équation (3) définit un vecteur propre $\{l; m; n\}$ associé à la valeur propre λ ($\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$). L'équation (3) traduit le fait que tous ces vecteurs sont perpendiculaires au vecteur $a = \{a_{11} - \lambda; a_{12}; a_{13}\}$. Le vecteur a est donc un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 (λ_1 étant une racine simple de l'équation caractéristique). La résolution du problème peut être terminée comme suit. Divisons le vecteur a par son module; nous obtenons le vecteur propre unitaire a_1 associé à la valeur propre λ_1. Trouvons ensuite une solution normée quelconque l_2, m_2, n_2 de l'équation (3). Le vecteur $a_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$ est alors le vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ ($\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$). Faisons le produit vectoriel du vecteur a_1 par a_2; nous obtiendrons le vecteur unitaire a_3 perpendiculaire à a_1. On en déduit que le vecteur a_3 est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$; de plus, a_3 est perpendiculaire à a_2. Nous avons obtenu donc la base cherchée: $\tilde{e}_1 = a_1$, $\tilde{e}_2 = a_2$, $\tilde{e}_3 = a_3$.

3) Les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont égaux, c'est-à-dire que $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ est racine triple de l'équation caractéristique.

Dans ce cas la transformation est une homothétie de rapport λ. Dans cette transformation, tous les vecteurs de l'espace sont des vecteurs propres associés à la valeur propre λ. Tout triplet de vecteurs unitaires $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ deux à deux perpendiculaires constituent la base cherchée (par exemple, ce peut être la base orthogonale donnée e_1, e_2, e_3).

131. Nous avons montré comment on trouve, pour toute transformation symétrique dans l'espace, une base orthogonale

composée des vecteurs propres unitaires $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$. Si $\tilde{e}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$, $\tilde{e}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$, $\tilde{e}_3 = \{l_3; m_3; n_3\}$, en passant à cette nouvelle base les coordonnées de tous les vecteurs de l'espace se transforment selon les formules du § 20 où

$$L = \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{Bmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

132. Exemple. Soit dans une base orthogonale e_1, e_2, e_3 la transformation linéaire:

$$\begin{aligned} x_1' &= 7x_1 - 2x_2, \\ x_2' &= -2x_1 + 6x_2 - 2x_3, \\ x_3' &= -2x_2 + 5x_3. \end{aligned}$$

Diagonaliser la matrice de cette transformation en passant à une nouvelle base orthogonale.

Solution. Ecrivons la matrice de la transformation considérée par rapport à la base donnée:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice A étant symétrique, on suivra la marche indiquée plus haut.

Etablissons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

soit $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$. Les racines de cette équation sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Les racines sont distinctes; ceci correspond au premier cas examiné au n° 130. Etablissons à partir des données du problème le système (2):

$$\begin{aligned} (7-\lambda)\, l - 2m &= 0, \\ -2l + (6-\lambda)\, m - 2n &= 0, \\ -2m + (5-\lambda)\, n &= 0. \end{aligned}$$

En posant dans ce système successivement $\lambda = 3, 6, 9$ et en déterminant chaque fois les solutions normées, on obtient les trois

vecteurs unitaires

$$\tilde{e}_1=\{l_1;\ m_1;\ n_1\}=\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\},$$

$$\tilde{e}_2=\{l_2;\ m_2;\ n_2\}=\left\{\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right\},$$

$$\tilde{e}_3=\{l_3;\ m_3;\ n_3\}=\left\{-\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right\}.$$

Les vecteurs $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ sont les vecteurs propres de la transformation donnée, ils sont associés aux valeurs propres $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$. Dans la base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ la matrice de la transformation donnée s'écrit

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&9\end{pmatrix};$$

la transformation est donc définie par les relations

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1'&=3\tilde{x}_1,\\ \tilde{x}_2'&=\quad 6\tilde{x}_2,\\ \tilde{x}_3'&=\qquad 9\tilde{x}_3.\end{aligned}$$

On peut représenter le changement que subissent les coordonnées de tous les vecteurs lors du passage à la base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ à l'aide de l'égalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

E x e m p l e. On donne la transformation linéaire

$$\begin{aligned}x_1'&=x_1+2x_2-4x_3,\\ x_2'&=2x_1-2x_2-2x_3,\\ x_3'&=-4x_1-2x_2+x_3\end{aligned}$$

par rapport à une base orthogonale e_1, e_2, e_3.

Diagonaliser la matrice de la transformation donnée en passant à une nouvelle base orthogonale.

Solution. Comme dans la base donnée la matrice A est symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

on peut suivre la marche indiquée au n° 130. Formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

soit $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$. Les racines de cette équation sont $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -3$. On remarque qu'il y a une racine double, c'est-à-dire qu'on est dans le second cas discuté au n° 130. Etablissons d'après les données du problème le système (2) :

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\,l + \quad & 2m \quad & -4n &= 0, \\ 2l + (-2-\lambda)\,m \quad & & -2n &= 0, \\ -4l \quad & -2m + (1-\lambda)n &= 0. \end{aligned}$$

Substituons ici la racine double $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = -3$, il vient

$$\begin{aligned} 4l + 2m - 4n &= 0, \\ 2l + m - 2n &= 0, \\ -4l - 2m + 4n &= 0. \end{aligned}$$

Le système s'est donc ramené à une seule équation essentielle

$$2l + m - 2n = 0. \qquad (*)$$

En vertu du n° 130 nous concluons que le vecteur $\{2; 1; -2\}$ dont les coordonnées sont les coefficients de l'équation (*) est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 6$; en le divisant par son module, nous obtenons le vecteur unitaire

$$\tilde{e}_1 = \left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}.$$

En prenant maintenant une autre solution quelconque de l'équation (*), par exemple, $l = 1$, $m = 2$, $n = 2$ et en normant cette solution on obtient le vecteur

$$\tilde{e}_2 = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}.$$

Le vecteur $\tilde{e}_2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -3. Le produit vectoriel de $\tilde{e}_1$ par $\tilde{e}_2$ fournit un troisième vecteur propre associé à la valeur propre -3:

$$\tilde{e}_3 = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}.$$

Les vecteurs $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ forment une base orthogonale. Lorsque l'on passe à cette nouvelle base, la matrice de la transformation donnée se diagonalise

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On a

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad (**)$$

On en déduit que la transformation considérée dans le présent problème est le produit de trois contractions: 1) la première de rapport 6 relativement au plan $O\tilde{e}_2\tilde{e}_3$; 2) la seconde de rapport -3 relativement au plan $O\tilde{e}_1\tilde{e}_3$; 3) la troisième de rapport -3 relativement au plan $O\tilde{e}_1\tilde{e}_2$. Notons avant tout que les coefficients de ces contractions sont plus grands que l'unité en valeur absolue; ceci veut dire qu'il s'agit en fait d'une dilatation de l'espace (par exemple, dans le premier cas la distance de chaque point au plan $O\tilde{e}_2\tilde{e}_3$ est multipliée par six). Notons encore que dans le second et le troisième cas le rapport de contraction est un nombre négatif. Interprétons géométriquement ce fait sur l'exemple de la transformation définie par la dernière matrice du second membre de (**). Cette correspondance se traduit par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'_1 &= \tilde{x}_1, \\ \tilde{x}'_2 &= \tilde{x}_2, \\ \tilde{x}'_3 &= -3\tilde{x}_3. \end{aligned}$$

On voit que cette transformation est telle que non seulement la distance du point au plan $O\tilde{e}_1\tilde{e}_2$ varie (augmente de trois fois), mais encore l'image M' $(\tilde{x}'_1, \tilde{x}'_2, \tilde{x}'_3)$ et son antécédent M $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ se trouvent des deux côtés de ce plan.

§ 25. Réduction à sa forme canonique d'une forme quadratique. Applications à la théorie des coniques et quadriques

133. *On appelle forme quadratique de deux variables* x_1, x_2 *le polynôme homogène du second degré par rapport à ces variables*:

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \tag{1}$$

Les a_{11}, a_{12}, a_{22} sont des nombres dont la donnée définit la forme; on les nomme *coefficients* de la forme. Au lieu de a_{12} on peut écrire a_{21}, en supposant que $a_{21} = a_{12}$. Soit un plan ramené à un système de coordonnées d'origine O et de vecteurs de base e_1, e_2. Les variables x_1, x_2 peuvent alors être considérées comme coordonnées d'un certain point M, et le nombre Φ comme valeur de la forme au point M $(x_1 ; x_2)$. Les quantités x_1, x_2 seront également considérées comme coordonnées du vecteur $x = \overrightarrow{OM}$.

134. Supposons que l'on passe de la base e_1, e_2 à une nouvelle base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$. Les coordonnées de tous les points et vecteurs changent alors selon les formules du § 17. La quantité Φ s'exprimera à l'aide des nouvelles coordonnées $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ du point M comme une nouvelle forme quadratique de $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$. Les coefficients de cette nouvelle forme sont fonctions des coefficients de la forme quadratique donnée et des coefficients des formules de changement de coordonnées. Proposons-nous de trouver les expressions de ces coefficients.

Pour simplifier les calculs, convenons d'utiliser uniquement des bases orthogonales (composées de vecteurs unitaires).

135. Représentons la forme quadratique donnée comme suit:

$$\Phi = x_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2). \tag{2}$$

Composons une matrice ayant pour lignes les coefficients de la première et la seconde parenthèses de (2):

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

La matrice A est la matrice de la forme quadratique (1) par rapport à la base donnée e_1, e_2. Elle est évidemment symétrique ($a_{21} = a_{12}$). Parallèlement à la forme donnée, considérons une transformation linéaire $x' = Ax$ de matrice A par rapport à la base e_1, e_2; la transformation $x' = Ax$ est définie par les formules:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Etant donné que e_1, e_2 est une base orthogonale et la matrice A symétrique, la transformation $x' = Ax$ est symétrique. L'expression (2) se met alors sous la forme

$$\Phi = x_1 x_1' + x_2 x_2'. \tag{5}$$

Par suite de l'orthogonalité de la base e_1, e_2, le second membre de (5) n'est autre que le produit scalaire du vecteur x par le vecteur $x' = Ax$:

$$\Phi = xx' = xAx. \tag{6}$$

Passons maintenant à une nouvelle base orthogonale $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= l_1 e_1 + m_1 e_2, \\ \tilde{e}_2 &= l_2 e_1 + m_2 e_2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Désignons comme d'habitude par L la transposée de la matrice des coefficients de (7):

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice L est orthogonale, c'est-à-dire que $L^{-1} = L^*$. Par rapport à la nouvelle base, la transformation linéaire $x' = Ax$ sera donnée par

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_1' &= \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2, \\ \tilde{x}_2' &= \tilde{a}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

avec la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Par suite de la symétrie de la transformation $x' = Ax$, la matrice $\tilde{A}$ est également symétrique ($\tilde{a}_{21} = \tilde{a}_{12}$). Dans les égalités (8) $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ sont les nouvelles coordonnées du vecteur x et $\tilde{x}_1'$, $\tilde{x}_2'$ les nouvelles coordonnées du vecteur $x' = Ax$. La nouvelle base étant elle aussi orthogonale, on peut écrire

$$\Phi = xx' = \tilde{x}_1\tilde{x}_1' + \tilde{x}_2\tilde{x}_2'.$$

En remplaçant ici $\tilde{x}_1'$, $\tilde{x}_2'$ d'après les formules (8), on obtient

$$\Phi = \tilde{x}_1(\tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2) + \tilde{x}_2(\tilde{a}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2) = \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1^2 + 2\tilde{a}_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{a}_{22}\tilde{a}_2^2.$$

On voit que les éléments de la matrice $\tilde{A}$ sont en même temps les coefficients de la forme quadratique Φ exprimée en nouvelles coordonnées. Donc, définir la matrice $\tilde{A}$ c'est définir les coeffi-

cients de la forme Φ. Le problème se ramène donc à une application directe des résultats du § 18; on a

$$\widetilde{A} = L^{-1}AL.$$

Comme $L^{-1} = L^*$, on a

$$\widetilde{A} = L^*AL, \tag{10}$$

soit, en écriture développée

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}.$$

L'égalité (10) *exprime la matrice* $\widetilde{A}$ *de la forme quadratique donnée par rapport à la nouvelle base* $\widetilde{e}_1$, $\widetilde{e}_2$, *à l'aide de la matrice A de cette forme écrite par rapport à l'ancienne base* $\widetilde{e}_1$, $\widetilde{e}_2$ *et à l'aide de la matrice L de passage.*

136. Un problème mathématique important qu'on rencontre souvent dans les applications, est le problème de réduction d'une forme quadratique donnée à sa forme canonique.

On dit qu'une forme quadratique est réduite à sa *forme canonique* si elle contient uniquement les carrés des coordonnées courantes, c'est-à-dire si $a_{12} = a_{21} = 0$. Dans ce cas la matrice de la forme est diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Pour ramener une forme quadratique arbitraire à sa forme canonique, il y a lieu de trouver une base par rapport à laquelle la matrice de la forme se diagonalise. Nous avons vu plus haut, au n° 135, que lorsqu'on passe d'une base orthogonale e_1, e_2 à une nouvelle base orthogonale $\widetilde{e}_1$, $\widetilde{e}_2$, la matrice d'une forme quadratique varie comme celle d'une transformation linéaire symétrique. Donc la réduction à sa forme canonique de la forme (1) se ramène à la diagonalisation de la matrice de la transformation linéaire (4). La résolution de ce problème est exposée au § 23.

D'après ce qui vient d'être dit, on peut adopter pour réduire une forme quadratique de deux variables x_1, x_2 à la forme canonique, le plan suivant.

Soit donnée, dans la base e_1, e_2, la forme

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_{22}^2$$

de matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

1) Formons l'équation caractéristique de la matrice A :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Trouvons les racines λ_1, λ_2 de cette équation.

2) En suivant les indications du § 23, trouvons pour la transformation linéaire (4) deux vecteurs unitaires propres deux à deux orthogonaux associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 ; notons-les $\widetilde{e}_1$, $\widetilde{e}_2$:

$$\widetilde{e}_1 = \{l_1 ; m_1\}, \quad \widetilde{e}_2 = \{l_2 ; m_2\}.$$

3) Passons à la base $\widetilde{e}_1$, $\widetilde{e}_2$. Par rapport à cette base

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et la forme donnée se ramène à la forme canonique :

$$\Phi = \lambda_1 \widetilde{x}_1^2 + \lambda_2 \widetilde{x}_2^2. \tag{11}$$

Lorsque l'on passe à la base e_1, e_2, les coordonnées de tous les vecteurs se transforment en vertu de l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Exemple. Réduire à sa forme canonique la forme quadratique

$$\Phi = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Solution. Etablissons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

soit $(\lambda - 5)^2 - 16 = 0$. D'où $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$. La forme canonique de la forme quadratique donnée s'obtient immédiatement

$$\Phi = \widetilde{x}_1^2 + 9\widetilde{x}_2^2.$$

Pour trouver la base par rapport à laquelle la forme donnée s'exprime ainsi, il nous faudra déterminer les vecteurs propres de la transformation (4). Ecrivons le système d'équations définissant les vecteurs propres cherchés :

$$\begin{aligned} (5 - \lambda)\, l + 4m &= 0, \\ 4l + (5 - \lambda)\, m &= 0. \end{aligned} \tag{*}$$

En portant ici $\lambda = \lambda_1 = 1$, $\lambda = \lambda_2 = 9$ et en normant la solution du système (*), on trouve les vecteurs

$$\tilde{e}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \quad \tilde{e}_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

qui constituent la nouvelle base.

Lorsque l'on passe à la base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ les coordonnées de tous les vecteurs changent d'après les formules

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_2,$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_2.$$

On vérifie immédiatement que les formules ci-dessus réduisent effectivement la forme quadratique donnée à sa forme canonique.

137. Revenons au n° 135. Nous avons considéré, en même temps que la forme quadratique, une transformation linéaire symétrique $x' = Ax$ définie par les formules (4) et de même matrice que la forme quadratique en question.

Les directions des vecteurs propres de la transformation $x' = Ax$ s'appellent *directions principales* de la forme donnée.

En réduisant une forme quadratique à sa forme canonique, on passe à une base orthogonale dont les vecteurs sont orientés suivant les directions principales de la forme.

138. Les coefficients λ_1, λ_2 de la forme canonique (11) de la forme quadratique sont dits *nombres caractéristiques* de la forme. En même temps, ils sont racines de l'équation caractéristique et valeurs propres auxquelles sont associés les vecteurs propres de la transformation linéaire $x' = Ax$ dont nous avons parlé au n° précédent.

139. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la forme admet un couple unique de directions principales, deux à deux orthogonales. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, toute direction est principale (voir § 23). Dans ce dernier cas la forme a l'expression canonique $\lambda x_1^2 + \lambda x_2^2$, où $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ par rapport à n'importe quelle base.

140. Connaissant les nombres caractéristiques d'une forme quadratique, on peut établir les estimations de sa grandeur.

En effet, soit donnée, par rapport à une base orthogonale e_1, e_2, la forme

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Réduisons Φ à sa forme canonique en passant à une nouvelle base orthogonale $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, il vient

$$\Phi = \lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2.$$

Supposons que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Alors

$$\lambda_1 (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) \leqslant \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 \leqslant \lambda_2 (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2).$$

Les deux bases e_1, e_2 et $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ étant orthogonales, on a $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = x_1^2 + x_2^2$. Par conséquent

$$\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) \leqslant \Phi \leqslant \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2). \tag{12}$$

Ce sont là les estimations annoncées. Les relations (12) sont des estimations exactes. En particulier, au point $\tilde{x}_2 = 0$, Φ coïncide avec le premier membre de ces relations; au point où $\tilde{x}_1 = 0$, Φ est égale au second membre.

Sur la circonférence unité $x_1^2 + x_2^2 = 1$ les estimations (12) se mettent sous la forme simple:

$$\lambda_1 \leqslant \Phi \leqslant \lambda_2.$$

Ainsi, les nombres caractéristiques sont les bornes de variation de la forme quadratique sur la circonférence unité.

141. Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, alors d'après (12), la forme Φ est positive en tous les points (sauf à l'origine où elle est nulle). Une telle forme est dite *définie positive*. Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, la forme est dite *définie négative*; ses valeurs sont dans ce cas négatives en tous les points (sauf à l'origine des coordonnées). Si λ_1, λ_2 sont de signes contraires, la forme est soit positive, soit négative (parfois elle est nulle). Une telle forme s'appelle *alternée*.

Exemple. La forme $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ est définie positive puisque $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 3/2$; c'est-à-dire que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Sur la circonférence unité $x_1^2 + x_2^2 = 1$ cette forme varie dans les limites

$$\frac{1}{2} \leqslant x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \leqslant \frac{3}{2}.$$

142. Considérons maintenant une forme quadratique de trois variables:

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \tag{13}$$

L'analogie étant complète avec le cas de deux variables, nous nous arrêterons sur les traits essentiels des formes de trois variables.

L'espace est supposé rapporté à un système de coordonnées orthogonales d'origine O et de base e_1, e_2, e_3 (formée de vecteurs unitaires). Les variables x_1, x_2, x_3 peuvent alors être considérées comme les coordonnées d'un point M $(x_1; x_2; x_3)$ ou du vecteur $x = \overrightarrow{OM}$. Φ est la valeur de la forme au point M $(x_1; x_2; x_3)$. Dans ce qui suit nous utiliserons uniquement des bases orthogonales formées de vecteurs unitaires.

Ecrivons la forme donnée comme suit :

$$\Phi = x_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + x_3 (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3),$$

en supposant que $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$.

Considérons aussi une transformation linéaire $x' = Ax$ définie dans la base e_1, e_2, e_3 par les formules

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$x'_3 = a_{31}x_1 + x_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

de cette transformation est dite matrice de la forme quadratique donnée par rapport à la base donnée e_1, e_2, e_3. La forme Φ peut maintenant s'écrire

$$\Phi = x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = xx' = xAx ;$$

ici xx' est le produit scalaire du vecteur x par le vecteur $x' = Ax$.

Soient $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ les vecteurs propres deux à deux perpendiculaires de la transformation $x' = Ax$ correspondant aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3. Si l'on passe à la base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$, la matrice de la forme quadratique donnée (qui est en même temps la matrice de la transformation $x' = Ax$) se diagonalise :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Quant à la forme Φ, elle se réduit à sa forme canonique :

$$\Phi = \lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + \lambda_3\tilde{x}_3^2.$$

Les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont les racines de l'équation caractéristique de la matrice A ; on les appelle *nombres caractéristiques* de la forme quadratique donnée.

Les directions des vecteurs propres de la transformation $x' = Ax$ sont *directions principales* de la forme quadratique. Si un vecteur propre est associé à la valeur propre λ ($\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), on dit que la direction principale définie par ce vecteur est associée à cette valeur λ.

La base orthogonale par rapport à laquelle une forme quadratique se met sous sa forme canonique est celle dont les vecteurs sont orientés suivant les directions principales de la forme considérée. Au § 24 nous avons montré comment on trouve une telle base.

Si les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont tous distincts, la forme correspondante possède exactement trois directions principales qui sont deux à deux orthogonales. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, il correspond alors au nombre λ_1 une direction principale déterminée que nous conviendrons d'appeler première. Au nombre $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$ correspond dans ce cas une infinité de directions principales; notamment, toute direction perpendiculaire à la première direction principale est une direction principale associée à la valeur propre $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, n'importe quelle direction dans l'espace est principale; une telle forme s'écrit sous sa forme canonique $\lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + \lambda x_3^2$ où $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ dans toute base orthogonale. Toutes les propositions que nous venons d'énoncer découlent directement des résultats du § 24.

Exemple. Réduire la forme quadratique

$$\Phi = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

à sa forme canonique.

Solution. La matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

de la forme donnée coïncide avec celle de la transformation linéaire examinée dans l'exemple 1 du n° 132. On a $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Il y a lieu de prendre comme nouvelle base les vecteurs $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ trouvés dans l'exemple mentionné. Dans la base $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ la forme quadratique donnée se réduit à la forme canonique:

$$\Phi = 3\tilde{x}_1^2 + 6\tilde{x}_2^2 + 9\tilde{x}_3^2.$$

143. Les méthodes de réduction d'une forme quadratique à sa forme canonique trouvent leur application en premier lieu dans la géométrie analytique.

Proposons-nous de simplifier l'équation d'une conique. Nous allons désigner, comme il est d'usage en géométrie analytique, les vecteurs d'une base orthogonale dans le plan par i, j et les coordonnées d'un point courant, par x, y. Pour ne pas alourdir les raisonnements avec des détails secondaires, nous allons con-

sidérer une équation du second degré ne contenant pas de terme du premier degré, soit

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = H. \qquad (14)$$

Cette équation définit une courbe du second degré centrée à l'origine des coordonnées (voir § 2). Réduire l'équation (14) à sa forme canonique c'est réduire à sa forme canonique la forme quadratique des termes de plus haut degré figurant au premier membre de cette équation. Les directions principales de cette forme sont dites directions principales de la courbe considérée.

Soient A la matrice de la forme quadratique des termes de plus haut degré, λ_1, λ_2 les racines de son équation caractéristique, $\tilde{i}$, $\tilde{j}$ les vecteurs unitaires orthogonaux des directions principales correspondant aux nombres λ_1, λ_2. Si l'on passe, sans changer l'origine des coordonnées, à la base $\tilde{e}$, $\tilde{j}$, dans les nouvelles coordonnées l'équation de la courbe se met sous la forme canonique :

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 = H.$$

Exemple. Réduire à sa forme canonique l'équation de la conique

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9;$$

déterminer la nature de cette conique.

Solution. La forme quadratique des termes de plus haut degré de cette équation coïncide avec la forme quadratique considérée dans l'exemple du n° 136. On a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$. La base cherchée est $\tilde{i} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right\}$, $\tilde{j} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Le passage à ce nouveau système de coordonnées s'obtient par rotation des axes d'un angle $\alpha = -45°$. Les formules correspondantes de changement de coordonnées sont

$$x = \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-\tilde{x} + \tilde{y}}{\sqrt{2}}.$$

L'équation canonique de la courbe donnée s'écrit

$$\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 = 9,$$

soit

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{1} = 1.$$

La courbe considérée est donc une ellipse de demi-axes 3 et 1.

BeatriceGloria_personal library

144. Considérons dans l'espace rapporté à une base orthogonale i, j, k l'équation

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=H. \qquad (15)$$

L'équation (15) définit une quadrique de centre à l'origine des coordonnées.

En réduisant à sa forme canonique la forme quadratique des termes de plus haut degré écrits au premier membre de cette équation, on réduit à sa forme canonique l'équation elle-même. Pour ce faire, il y a lieu, sans changer l'origine des coordonnées, de passer à une base orthogonale $\tilde{i}$, $\tilde{j}$, $\tilde{k}$ telle que ses vecteurs coïncident avec les directions principales de la quadrique donnée. Notons que les directions principales de la quadrique sont celles de la forme quadratique des termes de plus haut degré de son équation.

E x e m p l e. Réduire à sa forme canonique l'équation de la quadrique

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz=18;$$

déterminer la nature de cette quadrique.

S o l u t i o n. Composons la matrice de la forme quadratique des termes de plus haut degré:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que cette matrice coïncide avec celle de la transformation linéaire considérée au premier exemple du n° 132. On a $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$. La base cherchée est donc

$$\tilde{i}=\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\},$$

$$\tilde{j}=\left\{\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right\},$$

$$\tilde{k}=\left\{-\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right\}.$$

Lorsque l'on passe à cette base, les coordonnées changent selon les formules

$$x=\frac{1}{3}\tilde{x}+\frac{2}{3}\tilde{y}-\frac{2}{3}\tilde{z},$$

$$y=\frac{2}{3}\tilde{x}+\frac{1}{3}\tilde{y}+\frac{2}{3}\tilde{z},$$

$$\tilde{z}=\frac{2}{3}\tilde{x}-\frac{2}{3}\tilde{y}-\frac{1}{3}\tilde{z}.$$

L'équation canonique de la quadrique donnée s'écrit

$$3\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 + 9\tilde{z}^2 = 18,$$

soit

$$\frac{\tilde{x}^2}{6} + \frac{\tilde{y}^2}{3} + \frac{\tilde{z}^2}{2} = 1.$$

La surface considérée est donc un ellipsoïde de demi-axes $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$.

145. Si l'orientation de la base $\tilde{i}$, $\tilde{j}$, $\tilde{k}$ est sans importance, alors connaissant λ_1, λ_2, λ_3 on peut écrire immédiatement l'équation canonique de la quadrique. Les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont les racines de l'équation caractéristique qui est une équation du troisième degré. Le calcul des racines d'une telle équation est en général assez laborieux. Or, souvent il ne s'agit que de déterminer la nature de la quadrique donnée et pour ce faire il suffit de connaître les signes des nombres λ_1, λ_2, λ_3. On sait que les signes des racines d'une équation caractéristique se déterminent assez facilement à l'aide de la règle connue de Descartes (voir à ce sujet le n° 49).

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 7

Chapitre premier. THÉORIE GÉNÉRALE DES CONIQUES 9

§ 1. Changement de coordonnées dans le plan 9
§ 2. Réduction à la forme canonique de l'équation d'une conique de centre à l'origine des coordonnées 13
§ 3. Invariants et classification des formes quadratiques de deux arguments 19
§ 4. Réduction à la forme canonique de l'équation générale d'une conique 23
§ 5. Equations du centre. Indice de dégénérescence d'une conique. Exemples 27

Chapitre II. THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ OU QUADRIQUES 35

§ 6. Transformation de coordonnées cartésiennes orthogonales dans l'espace 35
§ 7. Quelques conclusions générales découlant des formules de changement de coordonnées 38
§ 8. Réduction à la forme canonique de l'équation d'une quadrique centrée à l'origine des coordonnées 39
§ 9. Invariants et classification des formes quadratiques de trois arguments 55
§ 10. Réduction de l'équation générale d'une quadrique à sa forme canonique 61
§ 11. Equations du centre. Indice de dégénérescence d'une quadrique. Exemples 66

Chapitre III. TRANSFORMATIONS LINÉAIRES ET MATRICES 73

§ 12. Transformations linéaires dans le plan 73
§ 13. Produit de transformations linéaires dans le plan et produit de matrices carrées du second ordre. Addition de matrices. Multiplication d'une matrice par un scalaire 82
§ 14. Théorème du déterminant du produit de deux matrices 87
§ 15. Signification géométrique du déterminant d'une transformation linéaire. Transformations singulières 88
§ 16. Inversion d'une transformation linéaire dans le plan 92
§ 17. Transformation des coordonnées des vecteurs lors du passage à une nouvelle base 94

§ 18. Changement de la matrice d'une transformation linéaire dans le plan par passage à une nouvelle base 98
§ 19. Notation matricielle d'un système de deux équations linéaires 101
§ 20. Transformation linéaire dans l'espace et matrices carrées du troisième ordre 103
§ 21. Vecteurs propres d'une transformation linéaire 117
§ 22. Equation caractéristique de la matrice d'une transformation linéaire 120
§ 23. Transformations linéaires symétriques. Diagonalisation de la matrice d'une transformation symétrique dans le plan 125
§ 24. Diagonalisation de la matrice d'une transformation linéaire symétrique dans l'espace 131
§ 25. Réduction à sa forme canonique d'une forme quadratique. Applications à la théorie des coniques et quadriques . . . 141